

Qubits Superconductores: Coherencia y Decoherencia

Proyecto de Grado

Iván Leonardo Zalamea Zamora
Director: Luis Quiroga Puello

Universidad de los Andes
Departamento de Física
Julio de 2004

Resumen

Se expone brevemente la teoría BCS sobre la superconductividad y se presenta de forma general la teoría de sistemas cuánticos abiertos con el fin de analizar bajo la técnica time convolutionless, TCL, la dinámica No-Markoviana para junturas Josephson en dos situaciones particulares. En la primera, la juntura Josephson se modela como un oscilador anarmónico (modelo de SQUID) y en la segunda se modela como un sistema de dos niveles (qubit). Se muestra en una variedad de situaciones la discrepancia para tiempos “cortos” entre los resultados obtenidos usando la aproximación estándar de Born-Markov y los resultados obtenidos usando la técnica TCL que incluye efectos de memoria. Se encuentra como común denominador de todas las simulaciones que la aproximación Markoviana no reproduce correctamente la derivada temporal de cantidades físicas interesantes como la energía de la juntura o la población de sus estados a tiempos cortos. Se analiza la decoherencia de los qubits con ayuda de una norma para operadores que mide la desviación entre el estado del qubit con disipación y el estado “ideal” del qubit en ausencia de disipación.

Índice general

1. Introducción	2
2. Superconductividad	5
2.1. Teoría BCS	5
2.2. Efecto Josephson	9
2.2.1. Modelo del Momentum Angular Acoplado	10
3. Qubits Superconductores	12
3.1. Qubit de Carga	12
3.2. Qubit de Flujo	14
4. Sistemas Cuánticos Abiertos	16
4.1. Ecuación Master	16
4.1.1. Aproximación de Born-Markov	18
4.2. Dinámica No-Markoviana	20
4.2.1. Técnica Nakajima-Zwanzig	20
4.2.2. Técnica TCL	22
5. Junturas Josephson: Dinámica No-Markoviana	30
5.1. Oscilador Anarmónico	30
5.2. Qubit Superconductor	43
6. Conclusiones	51
6.1. Agradecimientos	54

Capítulo 1

Introducción

La forma en que describimos el mundo depende de la escala en la que estemos interesados. Es así que al describir átomos, núcleos o partículas subatómicas, usamos la mecánica cuántica mientras que para describir células, granos de polvo u objetos mayores, usamos con tranquilidad la mecánica clásica. Esto nos hace preguntarnos por qué al ir uniendo un átomo tras otro hasta formar un grano de polvo debemos cambiar de teoría, y adicionalmente nos gustaría encontrar la forma de ir suavemente de la mecánica cuántica a la clásica. Sin embargo son en su esencia tan diferentes los comportamientos de la materia en uno y otro caso que parece imposible hallar un camino suave que conduzca de la incertidumbre cuántica a la certidumbre clásica. El salto abrupto entre estas dos teorías lo concretamos de la siguiente forma: cuánticamente es posible tener un sistema en una *superposición* de dos estados, por ejemplo, $|a\rangle$ y $|b\rangle$, en tal caso decimos que no sabemos en que estado está el sistema, aun más, *sabemos que no está en ninguno de los dos estados*. Clásicamente se puede, claro está, tener desconocimiento del estado en el que se encuentra el sistema, pero sin embargo *sabemos que debe estar en alguno de los dos estados*. Estas dos clases de ignorancia son diametralmente diferentes.

¿Por qué los fenómenos cuánticos son tan esquivos en el mundo macroscópico? Si tenemos un átomo solo, aislado del resto del mundo, se comporta cuánticamente, pero si tenemos a temperatura ambiente una gran cantidad de átomos, digamos una mol de átomos, se comportan de forma muy diferente. En éste cambio de comportamiento hay algo que algunos no entendemos [1] y pensamos que es uno de los enigmas fundamentales de la física actual. El cómo un sistema que se encuentra en un estado coherente, i.e. en una superposición cuántica de estados, evoluciona a un estado incoherente, es decir a un desconocimiento clásico del estado del sistema, es un apasionante problema que se ha abordado activamente desde la perspectiva de los sistemas cuánticos abiertos, teoría que va acompañada de experimentos, de recientes avances en nanotecnología y de posibles aplicaciones.

No solo por las aplicaciones sino también por la luz que dará al entendimiento de las inquietudes planteadas en los párrafos anteriores, se dedican actualmente

grandes esfuerzos al desarrollo de la computación cuántica. Lo que caracteriza a la computación cuántica es la unidad de información usada, el *bit cuántico* o qubit, una “entidad” que puede encontrarse en una superposición cuántica de dos estados, simbólicamente $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$. Es ésta posibilidad de superposición la diferencia entre un qubit y lo que entendemos comúnmente por bit, es decir una “entidad” que puede encontrarse en uno de dos casos posibles, por ejemplo corriente o no corriente. En principio cualquier sistema cuyo espacio de Hilbert se expanda con solo dos estados puede ser un qubit.

La carrera hacia el primer computador cuántico se desarrolla desde dos flancos, el del “software cuántico” y el del “hardware cuántico”. El software cuántico ha avanzado rápidamente y se ha mostrado que la velocidad de los algoritmos cuánticos es asombrosamente mayor que la velocidad de los algoritmos que se usan en los computadores actuales. La esencia de los algoritmos cuánticos está en el uso sistemático de las coherencias cuánticas. Supongamos que hemos planteado cierto problema que deseamos lo resuelva un computador cuántico, es decir, hemos preparado a un número N de qubits en cierto estado inicial. Entonces la solución del problema se llevará a cabo por medio de operaciones unitarias que actuarán en *paralelo* sobre todos los qubits. Es este paralelismo natural de los procesos cuánticos el que le da la gran velocidad al algoritmo.

Para hacer aplicaciones prácticas es necesario usar coherentemente una gran cantidad de qubits, lo que implica que la acción del medio ambiente no va a ser despreciable y consecuentemente la decoherencia acabaría por convertir al computador cuántico en una colección de qubits termalizados. Los dos principales problemas tecnológicos son, primero lograr que el acople de los qubits con el medio sea lo más pequeño posible y segundo poder ensamblar la cantidad necesaria de qubits con los debidos acoples entre ellos. Los qubits candidatos para crear computadores cuánticos son varios: spins nucleares, trampas de iones, estados fotónicos, puntos cuánticos semiconductores, sistemas superconductores, etc. El ensamblar una gran cantidad de estos dispositivos no parece factible a corto plazo a pesar de los continuos progresos en la manipulación controlada de la materia a escala nanoscópica, mas sin embargo, últimamente ha crecido el interés por los circuitos superconductores a escalas nanométricas, en especial por las junturas Josephson, ya que estas junturas además de tener la propiedad de comportarse como sistemas de dos niveles para cierto rango de parámetros, presentan varias ventajas frente a los otros qubits candidatos: primero se pueden fabricar con técnicas litográficas actualmente bien establecidas, segundo, se pueden controlar con voltajes y campos magnéticos aplicados a voluntad y tercero, se pueden acoplar a la tecnología de los computadores actuales [2].

El interés por analizar la manera en que el medio ambiente, inevitablemente presente, afecta a estos circuitos superconductores ha ido en aumento debido en gran medida a que el amplio desarrollo experimental obliga a tener predicciones teóricas cada vez más precisas. La forma estándar de afrontar estos problemas es bajo la aproximación Markoviana, en la que principalmente se supone que la evolución de un sistema no depende de su historia pasada sino únicamente del estado presente, aproximación que se sabe no es fiel ni a tiempos “cortos” ni cuando el acople con el medio es “grande”. Los avances experimentales y el deseo

de tener una mejor comprensión teórica de la dinámica para tiempos cortos (no solo para los qubits) han hecho que se utilicen métodos para ir mas allá de Markov. Por ejemplo en computación cuántica es imperativo, para evitar la decoherencia, minimizar la interacción entre los qubits y el medio, en particular es deseable disminuir en lo posible el tiempo de cada operación o medición. Es claro que para analizar este último caso la aproximación Markoviana no sería suficiente.

En los primeros cuatro capítulos de este trabajo presentamos las bases teóricas necesarias para analizar No-Markovianamente un oscilador anarmónico (modelo de SQUID) y dos clases de qubits superconductores. En el capítulo 5 llevamos a cabo dichos análisis novedosos, mostrando en variedad de situaciones las diferencias entre los resultados obtenidos aplicando la aproximación de Born-Markov y los resultados que hemos obtenido usando la técnica TCL a segundo y cuarto orden.

El documento se organiza como sigue. En el capítulo 2 se presenta una introducción a la teoría de la superconductividad, BCS, y también se describe una juntura Josephson que se analiza con un modelo sencillo que muestra varios de los fenómenos interesantes en esta clase de sistemas. En el capítulo 3 se presentan dos clases de qubits superconductores, el qubit de carga y el qubit de flujo, los cuales se analizarán posteriormente desde una perspectiva No-Markoviana. En el capítulo 4 se muestran las técnicas TCL y Nakajima-Zwanzig, que permiten rescribir la ecuación de Liouville-von Neumann en forma perturbativa, obteniéndose así, un método sistemático para ir más allá de Markov. En el capítulo 5 se usa la técnica TCL para hacer dos análisis No-Markovianos, (1) el de un oscilador anarmónico (modelo de SQUID) y (2) el de los qubits superconductores que se introducen en el capítulo 3. Terminamos con un capítulo que reúne las principales conclusiones de este trabajo de grado.

Capítulo 2

Superconductividad

En 1911 mientras Heike Kamerlingh Onnes estudiaba el comportamiento de la materia a bajas temperaturas, descubrió que el mercurio perdía su resistencia eléctrica por debajo de $4K$ [3]; dos años después recibía el premio Nobel por el descubrimiento de la superconductividad. Durante más de 20 años se creyó que los superconductores no eran mas que metales que simplemente perdían su resistencia eléctrica, no fue sino hasta 1933 que Meissner y Ochsenfeld encontraron que el estado superconductor es altamente diamagnético [4], i.e. al colocar un trozo de metal en presencia de un campo magnético y bajar la temperatura hasta que este llegue a la fase superconductora, se encuentra que el campo magnético es “expulsado” del interior del material (efecto Meissner). Hacia 1950 se había reunido suficiente evidencia experimental (efecto isotópico [5]) que revelaba la influencia de las vibraciones de la red cristalina en la formación del estado superconductor; bajo esta línea de pensamiento se publicaron varias teorías [6] [7] [8] [9] pero no fueron satisfactorias. En 1953 ya se habían realizado análisis de conductividad térmica a los superconductores, en los que se mostró la existencia de una brecha en las energías permitidas a los electrones “libres” en el estado superconductor. En este punto las teorías hechas eran fenomenológicas y explicaban parcialmente las propiedades de los superconductores. Pasaron casi 50 años desde el descubrimiento de la superconductividad para que se desarrollara una teoría completa sobre este fenómeno; fue en 1957 cuando Bardeen, Cooper y Schrieffer publicaron su teoría sobre la superconductividad, conocida hoy como teoría BCS [10].

2.1. Teoría BCS

Reconocida como uno de los grandes logros de la física teórica, la teoría BCS explica con gran precisión el comportamiento de los superconductores (de baja temperatura). Traduzco el primer párrafo del artículo publicado por Bardeen *et al.* [10]:

Los principales aspectos que una teoría sobre la superconductividad

debe explicar son (1) Una transición de fase de segundo orden a una temperatura crítica, T_c , (2) la dependencia de la capacidad calorífica específica electrónica de la forma $e^{(-T_0/T)}$ para temperaturas cercanas a $0K$ y otras evidencias de la existencia de la brecha de energías para excitaciones de partículas individuales (3) el efecto Meissner-Ochsenfeld ($\vec{B} = 0$), (4) efectos asociados con conductividad infinita ($\vec{E} = 0$), y (5) la relación de la masa isotópica y la temperatura crítica $T_c\sqrt{M} = const.$ Nosotros presentamos aquí una teoría que explica todo esto y ...

Bardeen, Cooper y Schrieffer muestran que la superconductividad aparece principalmente debido a que la interacción de los electrones libres en un metal con la red cristalina da lugar a intercambios *virtuales*¹ de fonones entre los electrones, lo que produce una interacción atractiva cuando la diferencia de energía de los estados electrónicos es menor a la energía del fonón intercambiado. Cuando la interacción mencionada “sobrepasa” la repulsión de Coulomb apantallada por el medio, se espera que el metal se encuentre en la fase superconductor.

Se analizará brevemente la existencia de un estado superconductor a temperatura $0K$ asumiendo que el metal es un sistema denso de fermiones (electrones), que interactúan por Coulomb e intercambios *virtuales* de fonones, descritos por el siguiente Hamiltoniano,

$$H = \sum_{k>k_F} \epsilon_k n_{k\sigma} + \sum_{k<k_F} |\epsilon_k|(1 - n_{k\sigma}) + H_{Coul} + \frac{1}{2} \sum_{k,k',\sigma,\sigma',\kappa} \frac{2\hbar\omega_k |M_\kappa|^2 C_{k'-\kappa,\sigma'}^\dagger C_{k',\sigma'} C_{k+\kappa,\sigma}^\dagger C_{k,\sigma}}{(\epsilon_k - \epsilon_{k+\kappa})^2 - (\hbar\omega_\kappa)^2} \quad (2.1)$$

donde ϵ_k son las energías de los estados de Bloch medidas con respecto al nivel de Fermi, H_{Coul} es la energía debido al potencial de Coulomb, $|M_\kappa|$ es la matriz de interacción fonón-electrón, $C_{k,\sigma}^\dagger$ y $C_{k,\sigma}$ son los operadores creación y aniquilación de electrones y $n_{k,\sigma} = C_{k,\sigma}^\dagger C_{k,\sigma}$ es el operador número de electrones. El último término del Hamiltoniano da cuenta del intercambio de un fonón de frecuencia ω_κ entre dos electrones. Dado que $|\epsilon_k - \epsilon_{k+\kappa}| \sim K_B T$ es de esperar que a bajas temperaturas el denominador sea negativo, lo que puede conllevar a una atracción neta entre los electrones.

Como los electrones obedecen la estadística de Fermi-Dirac, los elementos matriciales M_κ alternan de signo al hacerse la suma en la ecuación 2.1, es así que al calcular la energía de un estado arbitrario $|\phi\rangle$, es decir calcular $\langle\phi|H|\phi\rangle$ la contribución neta de este término será pequeña. Sin embargo, dado que la interacción fonon-electrón contiene el término

$$C_{k'_2,\sigma_2}^\dagger C_{k_2,\sigma_2} C_{k'_1,\sigma_1}^\dagger C_{k_1,\sigma_1}, \quad (2.2)$$

¹ *Virtuales* en cuanto a que la interacción es mediada por la red cristalina

si se escogen adecuadamente los estados ocupados es posible obtener una configuración que dé una contribución, apreciable, negativa a la energía. Una forma de escoger los estados es ocuparlos por pares, y ya que estamos buscando la más baja energía posible es adecuado aparear estados de momento antiparalelos y spins opuestos. Para llevar a cabo lo anterior definimos operadores de aniquilación y creación de pares:

$$b_k = C_{k,\uparrow} C_{-k,\downarrow} \quad (2.3)$$

$$b_k^\dagger = C_{k,\uparrow}^\dagger C_{-k,\downarrow}^\dagger \quad (2.4)$$

los que cumplen las relaciones de conmutación:

$$[b_k, b_{k'}^\dagger]_- = (1 - n_{k\uparrow} - n_{-k\downarrow}) \delta_{kk'} \quad (2.5)$$

$$[b_k, b_{k'}]_- = 0 \quad (2.6)$$

$$[b_k, b_{k'}]_+ = 2b_k b_{k'} (1 - \delta_{kk'}) \quad (2.7)$$

La suma de la energía cinética de los electrones y de la parte de interacción del Hamiltoniano que conecta pares con momentum cero, se puede expresar de la siguiente forma en términos de los operadores b 's :

$$H_{red} = 2 \sum_{k > k_F} \epsilon_k b_k^\dagger b_k + 2 \sum_{k < k_F} |\epsilon_k| b_k b_k^\dagger - \sum_{kk'} V_{kk'} b_{k'}^\dagger b_k \quad (2.8)$$

con

$$-V_{kk'} = \langle -k' \downarrow, k' \uparrow | H_I | -k \downarrow, k \uparrow \rangle + \langle k' \uparrow, -k' \downarrow | H_I | k \uparrow, -k \downarrow \rangle \quad (2.9)$$

donde H_I es la parte de interacción en el Hamiltoniano que relaciona a pares con momentum cero. En otras palabras, el Hamiltoniano de la ecuación 2.8 representa la energía total *menos* la energía debido a coulomb, *menos* la energía debido a interacciones entre electrones cuyo momentum total no es cero y *menos* la energía cinética de los electrones que no se encuentren apareados. Para un metal en estado normal este término será (muy cercano a) cero, no es así para el estado superconductor, como se verá en un momento. Asumiendo que la probabilidad de ocupación de una configuración específica de pares es igual a la multiplicación de las probabilidades de los estados individuales se puede proponer la siguiente función de onda:

$$\Psi = \prod_k [(1 - h_k)^{1/2} + h_k^{1/2} b_k^\dagger] \Phi_0 \quad (2.10)$$

donde Φ_0 es el estado de vacío y h_k es la probabilidad de que el estado de Bloch k esté ocupado. La función de onda anterior no especifica el número de

pares en el conductor, sin embargo es deseable utilizar un estado base en el que el número de pares esté bien definido, llamémoslo Ψ_N . Es decir, la proyección de Ψ en el espacio donde hay exactamente N pares es Ψ_N .

Si hay una probabilidad W_N de que halla N pares, la probabilidad de que el estado de Bloch k esté ocupado es $h_k W_N$, así se puede escribir Ψ_N de la forma

$$\Psi_N = (1 - h_k)^{1/2} \psi_{N0} + h_k^{1/2} \psi_{N1} \quad (2.11)$$

en donde ψ_{N0} y ψ_{N1} son funciones normalizadas, y se establece explícitamente que el estado k está ocupado con probabilidad h_k . Similarmente, si se quiere expresar que el estado k está ocupado con probabilidad h_k y el estado k' con probabilidad $h_{k'}$ dado que hay N pares, la función de onda se escribirá entonces

$$\begin{aligned} \Psi_N = & (h_k h_{k'})^{1/2} \psi_{N11} + (h_k (1 - h_{k'}))^{1/2} \psi_{N10} + \\ & + (h_{k'} (1 - h_k))^{1/2} \psi_{N01} + ((1 - h_k)(1 - h_{k'}))^{1/2} \psi_{N00}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Usando las ecuaciones 2.11 y 2.12 podemos calcular la diferencia de energía entre el estado Ψ_N y un estado normal, esto es

$$W_0 = \langle \Psi_N | H_{red} | \Psi_N \rangle, \quad (2.13)$$

resulta entonces,

$$\begin{aligned} W_0 = & 2 \sum_{k > k_F} \epsilon_k h_k + 2 \sum_{k < k_F} |\epsilon_k| (1 - h_k) - \\ & - \sum_{k, k'} V_{kk'} [h_k (1 - h_k) h_{k'} (1 - h_{k'})]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si existen h_k que hagan $W_0 < 0$ se tendrá entonces un estado con menor energía que el estado “normal” del metal a temperatura cero, es decir en el que todos los niveles por debajo de la energía de fermi están ocupados. Minimizando W_0 con respecto a h_k se obtiene

$$\frac{[h_k (1 - h_k)]^{1/2}}{1 - 2h_k} = \frac{\sum_{k'} V_{kk'} [h_{k'} (1 - h_{k'})]^{1/2}}{2\epsilon_k}. \quad (2.15)$$

Para simplificar el problema se supondrá $V_{kk'} = V = \langle V_{kk'} \rangle$ para pares que hagan transiciones dentro de la región $-\hbar\omega < \epsilon < \hbar\omega$ y cero fuera de ésta, siendo ω la frecuencia promedio de los fonones intercambiados. Despejando h_k tenemos²

$$h_k = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \epsilon_0^2}} \right] \quad (2.16)$$

²Al solucionar la ecuación 2.15 se obtienen dos soluciones, se escoge la solución tal que h_k sea una función decreciente con respecto a ϵ_k . Hay que notar que la otra solución también es físicamente posible, pero la energía cinética obtenida con esa otra solución es mayor.

$$\epsilon_0 = V \sum_{k'} [h_{k'}(1 - h_{k'})]^{1/2} \quad (2.17)$$

y

$$[h_k(1 - h_k)]^{1/2} = \frac{\epsilon_0}{2(\epsilon_k^2 + \epsilon_0^2)^{1/2}} \quad (2.18)$$

entonces ϵ_0 debe cumplir:

$$\frac{1}{V} = \sum_k \frac{1}{2(\epsilon_k^2 + \epsilon_0^2)^{1/2}} \quad (2.19)$$

Al pasar al límite continuo reemplazamos la sumatoria por una integral y siendo $N(0)$ la densidad de estados para un electrón en la superficie de Fermi, se obtiene

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega} \frac{d\epsilon}{(\epsilon^2 + \epsilon_0^2)^{1/2}} \quad (2.20)$$

así que

$$\epsilon_0 = \frac{\hbar\omega}{\sinh\left[\frac{1}{N(0)V}\right]}. \quad (2.21)$$

Finalmente, pasando al límite continuo la ecuación 2.14 y reemplazando h_k de 2.16, se encuentra que la diferencia de energías entre el estado superconductor y el estado normal, conocida como brecha superconductora, es:

$$W_0 = \frac{-2N(0)(\hbar\omega)^2}{e^{1/(N(0)V)} - 1}. \quad (2.22)$$

Se deduce que si en promedio la interacción entre los electrones es negativa ($V > 0$), el estado Ψ_N , con los h_k dados por 2.16, tiene una energía menor al estado normal. Bardeen, Cooper y Schrieffer demuestran que el estado Ψ_N describe efectivamente las propiedades de los superconductores de baja temperatura³. Desde 1957 éste ha sido el punto de partida para el estudio de los superconductores.

2.2. Efecto Josephson

Entre 1961 y 1962 mientras Brian D. Josephson trabajaba como estudiante de posgrado en el Royal Society Mond Laboratory (Universidad de Cambridge), bajo supervisión de Brian Pippard, descubrió varios fenómenos interesantes al unir por medio de una barrera aislante dos superconductores, dispositivo que se conoce como juntura Josephson.

³Esta teoría no explica el por qué existen superconductores a temperaturas tan altas como 90K, fabricados 30 años después de publicada la teoría.

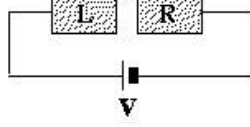


Figura 2.1: Juntura Josephson

En una juntura como la de la Figura 2.1 Josephson predijo y posteriormente comprobó experimentalmente que podía surgir una “supercorriente” en ausencia de voltaje ($V = 0$), y que si $V \neq 0$ surgiría una “supercorriente” oscilatoria de frecuencia $\nu = 2eV/h$. Por estos hallazgos Josephson recibiría el premio Nobel en 1973. En la sección siguiente describiré cómo se deducen los anteriores fenómenos partiendo del estado superconductor de la teoría BCS.

2.2.1. Modelo del Momentum Angular Acoplado

En 1983 Andrew L. DiRienzo y Ricahrd A. Young publicaron un modelo de la juntura Josephson en el que hallaron la corriente a través de la juntura usando una analogía con el momentum angular [11]. Siguiendo la notación de DiRienzo y Young denotemos el estado superconductor a temperatura $0K$ por:

$$|\Psi\rangle = \prod_k [U(k)|0\rangle_k + V(k)e^{i\psi}\sigma_k^\dagger|0\rangle_k] \quad (2.23)$$

donde ψ es una fase arbitraria (no incluida en el tratamiento de la sección 2.1) que no altera las propiedades del superconductor y σ_k^\dagger es el operador creación de un par. La notación muestra la analogía con el momentum angular, σ_k^\dagger será un operador que actúe sobre el spin “etiquetado” con k . Si definimos $\sigma_k^\dagger|0\rangle_k = |\uparrow\rangle_k$ y $|0\rangle_k = |\downarrow\rangle_k$ podemos rescribir la ecuación 2.23 de la siguiente forma:

$$|\Psi\rangle = \prod_k [U(k)|\downarrow\rangle_k + V(k)e^{i\psi}|\uparrow\rangle_k] \quad (2.24)$$

Y así, ahora nos interesaremos por describir el comportamiento de tantos spins-1/2 como k 's existan.

Para una juntura como la de la figura 2.1 el Hamiltoniano se puede escribir como la suma de un término debido a la fuente DC más un término debido al tunelamiento de pares entre los dos superconductores,

$$\hat{H} = \hat{H}_V + \hat{H}_T \quad (2.25)$$

con

$$\hat{H}_V = \frac{qV}{2}(\hat{N}_L - \hat{N}_R) \quad (2.26)$$

donde $q = -2|e|$, \hat{N}_L y \hat{N}_R son el número de pares al lado izquierdo y derecho de la juntura respectivamente y el término de tunelamiento

$$\hat{H}_T = \sum_{k,k'} T_{k,k'} (\sigma_k^+ \sigma_{k'}^- + \sigma_k^- \sigma_{k'}^+) \quad (2.27)$$

donde se ha supuesto que los dos superconductores son idénticos, por esto los operadores σ no se etiquetan para lado izquierdo o derecho. Este término expresa que un par de Cooper con mometum k pasa por tunelamiento a través de la barrera al lado derecho (izquierdo) mientras que un par con momentum k' pasa por tunelamiento al lado izquierdo (derecho). La energía involucrada al ocurrir el anterior tunelamiento es $T_{k,k'}$.

Si se asume que $T_{k,k'} = T$ para todo k y k' que se encuentren en la región $\epsilon_F - \Delta < \epsilon < \epsilon_F + \Delta$ donde ϵ_F y Δ son energía de Fermi y la brecha de superconductora respectivamente, y se hace uso de la analogía con el momentum angular se puede calcular la corriente a través de la juntura [11], esto es,

$$I = \frac{8qT}{\hbar m^2} \sin \left[-\frac{qV}{\hbar} t + \alpha_L(0) - \alpha_R(0) \right] \quad (2.28)$$

donde m es el número de estados que tienen energías en la región $\epsilon_F - \Delta < \epsilon < \epsilon_F + \Delta$ y $\alpha_{L/R}(0)$ son fases iniciales arbitrarias de los superconductores izquierdo y derecho.

Cuando la diferencia de potencial en la fuente es cero, si las fases de los superconductores son diferentes se observará que hay una “supercorriente” DC de tunelamiento, en caso contrario se observa que la corriente oscila con frecuencia angular $2eV/\hbar$, tal como se dijo anteriormente.

DiRienzo y Young muestran que esta aproximación al problema es equivalente a la de Anderson [12] y a la de Feynman [13].

Capítulo 3

Qubits Superconductores

En los últimos años, con particular interés hacia la creación de computadores cuánticos, se ha puesto especial atención a la dinámica de sistemas de dos niveles con disipación, particularmente las junturas Josephson están siendo ampliamente estudiadas con estos fines, debido a que bajo ciertas condiciones esta clase de circuitos se comporta como sistemas de dos niveles y porque es relativamente sencillo realizar con ellas operaciones lógicas por medio de compuertas eléctricas. Las perspectivas experimentales son muy alentadoras. En mayo de 2002 D. Vion *et al.* [14] publicaron el éxito en la manipulación de un circuito eléctrico con una juntura Josephson, concluyendo que esta clase de circuitos es adecuado para crear un procesador cuántico. Al mismo tiempo Yu *et al.* [15] reportaron la generación y observación de oscilaciones coherentes entre dos estados cuánticos macroscópicos en una juntura Josephson, concluyendo también la factibilidad de la realización de computadores cuánticos. En octubre de 2003 Yamamoto *et al.* [16] reportan la creación de la compuerta lógica C-NOT usando dos Qubits superconductores. Este último resultado representa un importante hallazgo, ya que Barenco *et al.* [17] mostraron que con la operación C-NOT más operaciones con un sólo Qubit (rotaciones en el espacio de “spin”) se logra una base universal para hacer cualquier cálculo cuántico. En las siguientes dos secciones se definirán y describirán las características de dos clases de qubits superconductores: de carga y de flujo.

3.1. Qubit de Carga

Un circuito como el de la figura 3.1 se denomina generalmente Qubit de carga; consiste de una juntura Josephson, un condensador C_g y una fuente V_g conectados en paralelo. A la juntura se le asocia una energía de acople E_J , que corresponde a la máxima energía necesaria para tunelar un par de Cooper a través de ella. La separación aislante entre los dos superconductores actúa como un condensador C_J . La energía debida a la carga de los condensadores es $4E_C(n - n_g)^2$, con $E_C = e^2/2(C_J + C_g)$, $n_g = C_g V_g / 2e$ y n es el exceso

de pares de Cooper en el superconductor derecho. La energía debido al tunelamiento de pares de Cooper es $E_J \cos \Theta$, siendo Θ la diferencia de fase entre los superconductores, variable conjugada de n ($n = -i \frac{\partial}{\partial \Theta}$) [2].

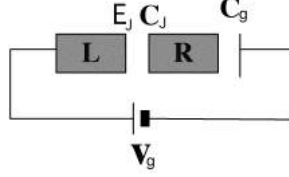


Figura 3.1: Qubit de carga

Para los propósitos de conseguir un sistema de dos niveles, la juntura Josephton se debe construir con un material cuya brecha superconductor (Δ) sea (mucho) mayor que E_C y E_J , así se logra suprimir el tunelamiento de electrones individuales¹. Resumiendo, tenemos el siguiente Hamiltoniano:

$$\hat{H} = 4E_C(n - n_g)^2 - E_J \cos \Theta. \quad (3.1)$$

Cuando $E_C \gg E_J$, es conveniente usar la base de estados de carga $|n\rangle$. Así se puede escribir el Hamiltoniano de tal manera que queda visible bajo qué condiciones el sistema se reduce efectivamente a dos niveles. Esto es

$$\hat{H} = \sum_n \left\{ 4E_C(n - n_g)^2 |n\rangle\langle n| - \frac{1}{2}E_J(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) \right\} \quad (3.2)$$

Si se tiene que $n_g = m + \frac{1}{2}$, con m entero, existen dos estados con energías casi iguales ($|m\rangle$ y $|m+1\rangle$) y a baja temperatura el resto de los estados de carga quedan con poca probabilidad de ser ocupados. Para concretar el argumento asumamos que $n_g \sim \frac{1}{2}$, así los estados importantes serán $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Entonces tenemos:

$$\hat{H} = 4E_C n_g^2 \{ |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \} + 4E_C(1 - 2n_g) |1\rangle\langle 1| - \frac{1}{2}E_J \{ |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \} \quad (3.3)$$

Ahora, para obtener una forma más simétrica podemos sumar una constante al Hamiltoniano y escribir:

$$\hat{H} = 2E_C(1 - 2n_g) \{ |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0| \} - \frac{1}{2}E_J \{ |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \} \quad (3.4)$$

Este Hamiltoniano será el punto de partida para estudios posteriores, pero para simplificar la escritura es conveniente usar la notación típica de momentum angular, esto es

¹El tunelamiento de un sólo electrón conllevaría a la aparición de dos electrones libres (uno en cada superconductor) es decir un aumento de 2Δ en la energía.

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}(B_z \hat{\sigma}_z + B_x \hat{\sigma}_x) \quad (3.5)$$

donde $B_z = 4E_C(1 - 2n_g)$ y $B_x = E_J$.

El Hamiltoniano 3.5 presenta varias características interesantes, principalmente que permite realizar rotaciones *controladas* en el espacio de spin. Bajo el regimen de parámetros supuestos, $B_z \gg B_x$, si n_g es cercano a 0, el Hamiltoniano se reduce a $\hat{H} = -\frac{1}{2}B_z \hat{\sigma}_z$, lo que permite hacer la siguiente rotación

$$U_z(\alpha) = e^{i\frac{\alpha}{2}\hat{\sigma}_z} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$$

con $\alpha = B_z t/\hbar$, donde t el tiempo que opere el Hamiltoniano. Ahora, si se escoge el voltaje tal que $n_g = \frac{1}{2}$ el hamiltoniano se reduce a $\hat{H} = -\frac{1}{2}B_x \hat{\sigma}_x$, consiguiendose así la rotación:

$$U_x(\alpha) = e^{i\frac{\alpha}{2}\hat{\sigma}_x} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & i \sin \frac{\alpha}{2} \\ i \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

siendo en este caso $\alpha = E_J t/\hbar$. Con estas dos rotaciones se pueden realizar *todas* las operaciones sobre un sólo qubit, siendo así este tipo de dispositivo suficiente para construir, en principio, un procesador cuántico, siempre y cuando se puedan también generar operaciones controladas con dos qubits.

3.2. Qubit de Flujo

En esta sección nos interesaremos en un circuito como el de la figura 3.2, en el que se encierra entre dos superconductores un flujo magnético Φ_x . El flujo magnético cambia la fase de los superconductores, modificando la energía de tunelamiento. Este nuevo grado de control es importante con miras a posibles aplicaciones en computación cuántica.

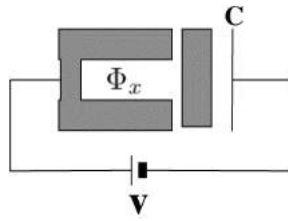


Figura 3.2: Qubit de flujo

La energía de tunelamiento modificada es:

$$\begin{aligned}
& -E_J \cos\left(\Theta + \pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0}\right) - E_J \cos\left(\Theta - \pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0}\right) \\
& = -2E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0}\right) \cos \Theta
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Donde $\Phi_0 = hc/2e$ es el quantum de flujo magnético. Haciendo la analogía con el momentum angular, el campo magnético en la dirección x ahora es modulable entre $2E_J$ y 0, ie.

$$B_x = 2E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0}\right) \tag{3.7}$$

lo que hace más versátil a este circuito, permitiendo que el rango de los E_J aceptables sea mayor. Hay dos ventajas importantes que tiene el qubit de flujo sobre el qubit de carga: (i) B_z y B_x se pueden controlar independientemente con el voltaje y con el flujo magnético respectivamente y (ii) que se puede hacer $\hat{H} = 0$ y mantener así un estado fijo en el tiempo.

Capítulo 4

Sistemas Cuánticos Abiertos

Las aplicaciones tecnológicas de la mecánica cuántica han hecho que crezca el interés sobre la forma como interactúan los sistemas cuánticos con el medio ambiente. El estudio de estos temas se conoce como teoría de sistemas cuánticos abiertos. En este trabajo nos interesamos principalmente en estudiar la dinámica de Qubits superconductores, los que, en caso de querer hacerse aplicaciones técnicas, ya sea computadores cuánticos u otras, deben ser tratados necesariamente como sistemas cuánticos abiertos.

El problema teórico supone grandes complicaciones analíticas, ya que al incluir el medio que interactúa con un sistema de interés se incluye una cantidad inmanejable de grados de libertad, lo que hace generalmente imposible solucionar el problema para todas las variables. Sin embargo, las variables que uno quiere conocer en una determinada situación son una pequeñísima porción del total y los esfuerzos se enfilan entonces a destilar esa “poca” pero valiosa información. En las siguientes secciones se presentará el procedimiento canónico, es decir el planteamiento de una ecuación de movimiento para las variables “interesantes” del problema, conocida como Ecuación Master y los métodos más usuales para solucionarla. Teniendo en mente la aplicación de estas teorías a los Qubits superconductores, se terminará el capítulo ilustrando estas técnicas con un ejemplo exactamente soluble.

4.1. Ecuación Master

El problema general se puede plantear de la siguiente forma: un sub-sistema (pequeño) de interés que interactúa con el medio ambiente o baño térmico.

Llamemos \hat{H}_S y \hat{H}_B los Hamiltonianos del (sub-)sistema de interés y del baño térmico, respectivamente, y $\hat{H}_I(t)$ el Hamiltoniano que incluye la interacción entre el sistema y el baño. Queremos predecir cómo evoluciona el vector de estado del sistema total, así que comencemos con la ecuación de Schrödinger,

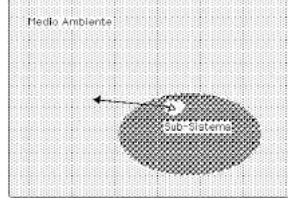


Figura 4.1: Sub-sistema interactuando con el medio

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \widehat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (4.1)$$

donde $\widehat{H}(t) = \widehat{H}_S + \widehat{H}_B + \widehat{H}_I(t)$ y $\hbar = 1$. La solución de la ecuación 4.1 se puede escribir en términos de un operador unitario $U(t, t_0)$, que transforma un estado inicial en el tiempo t_0 al estado en el tiempo t , i.e. $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$. De aquí se desprende que el operador $U(t, t_0)$ cumple la siguiente ecuación,

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = \widehat{H}(t) U(t, t_0) \quad (4.2)$$

con la condición $U(t_0, t_0) = I$. Generalmente la dinámica del sub-sistema no se puede describir por medio de una evolución unitaria en el tiempo. En estos casos es preciso formular el problema en términos de la evolución de una matriz densidad. Supongamos que inicialmente el universo se encuentra en una mezcla estadística de estados $|\psi_j\rangle$ con probabilidad p_j cada uno. Definimos entonces la matriz densidad inicial de la siguiente forma:

$$\rho(t_0) = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \quad (4.3)$$

Como cada $|\psi_j\rangle$ evoluciona en el tiempo obedeciendo la ecuación de Schrödinger, la matriz densidad para un tiempo posterior t será:

$$\rho(t) = \sum_j p_j U(t, t_0) |\psi_j\rangle \langle \psi_j| U^\dagger(t, t_0) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (4.4)$$

Derivando con respecto al tiempo se encuentra que $\rho(t)$ cumple la siguiente ecuación de movimiento;

$$i \frac{d}{dt} \rho(t) = [\widehat{H}(t), \rho(t)] \quad (4.5)$$

Por notación es conveniente definir el operador de Liouville o Liouvilliano $\mathcal{L}(t) = -i[\widehat{H}(t), \cdot]$, así podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \mathcal{L}(t) \rho(t) \quad (4.6)$$

La anterior ecuación, conocida como ecuación de Liouville-von Neumann, nos servirá como punto de partida para obtener la ecuación de movimiento para el sub-sistema, pero antes es necesario hacer una pequeña modificación que hará mas transparente el trabajo posterior. Llamemos $\widehat{H}_0 = \widehat{H}_S + \widehat{H}_B$ y definamos los siguientes dos operadores unitarios:

$$U_0(t, t_0) = e^{-i\widehat{H}_0(t-t_0)} \quad (4.7)$$

$$U_I(t, t_0) = U_0^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) \quad (4.8)$$

y definimos la matriz densidad en la *imagen de interacción* como:

$$\rho_I(t) = U_I(t, t_0)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0) \quad (4.9)$$

$\rho_I(t)$ cumple la siguiente ecuación:

$$i\frac{d}{dt}\rho_I(t) = [H_I(t), \rho_I(t)] \quad (4.10)$$

donde $H_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0)\widehat{H}_I(t)U_0(t, t_0)$. Ahora sí podemos deducir una ecuación master para el sub-sistema.

4.1.1. Aproximación de Born-Markov

Podemos expresar la ecuación 4.10 en forma integral

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - i \int_0^t ds [H_I(s), \rho_I(s)] \quad (4.11)$$

e insertar de nuevo $\rho_I(t)$ en el lado derecho de 4.10,

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = -i[H_I(t), \rho_I(0)] - \int_0^t ds [H_I(t), [H_I(s), \rho_I(s)]] \quad (4.12)$$

La anterior ecuación nos da información tanto del baño térmico como del sistema que deseamos estudiar (se suprimirá el sub- si no hay ambigüedad). La forma de encontrar una ecuación solamente para los grados de libertad del sistema es promediar sobre los estados posibles del baño térmico, matemáticamente se dice que tomamos la traza sobre los estados del baño,

$$tr_B\{\cdot\} = \sum_{\omega} \langle \psi_{\omega} | \cdot | \psi_{\omega} \rangle \quad (4.13)$$

donde los $|\psi_{\omega}\rangle$ forman una base para el espacio de Hilbert del baño. Nótese que al tomar la traza sobre el baño no se alteran los promedios de los observables del sistema, es decir, si A es un observable del sistema de interés, se tiene que

$$\langle A \rangle = tr\{\rho A\} = \sum_{\Omega} \langle \psi_{\Omega} | \rho A | \psi_{\Omega} \rangle = \sum_s \langle \psi_s | tr_B\{\rho A\} | \psi_s \rangle \quad (4.14)$$

donde los $|\psi_\Omega\rangle$ forman una base para el espacio de Hilbert del baño y el sistema y los $|\psi_s\rangle$ una base para el sistema solamente.

Llamando $\rho_S(t) = \text{tr}_B\{\rho_I(t)\}$ y tomando la traza sobre el baño a la ecuación 4.12 y asumiendo que $\text{tr}_B[H_I(t), \rho_I(0)] = 0$ ¹ tenemos,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t dstr_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_I(s)]] \quad (4.15)$$

Sin embargo esta ecuación todavía no es satisfactoria, ya que aparece dependencia explícita de tiempos pasados en $\rho_I(s)$. Esta dependencia se puede suprimir en ciertas situaciones, simplificando así ostensiblemente el problema, en ese caso es necesario hacer una primera aproximación. Si el acople entre el baño térmico y el sistema es pequeño, la influencia del primero sobre el segundo no será muy grande y la matriz densidad para el sistema total va a ser aproximadamente la multiplicación tensorial de la matriz del sub-sistema y la matriz casi inalterada del baño térmico, $\rho_I(t) \cong \rho_s(t) \otimes \rho_B$. Este procedimiento es conocido como la aproximación de Born. Bajo esta aproximación obtenemos una ecuación integro-diferencial para $\rho_S(t)$ en la que todavía, sin embargo, $\frac{d}{dt}\rho_S(t)$ depende explícitamente de tiempos pasados s ,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t dstr_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]] \quad (4.16)$$

Para obtener una ecuación local en el tiempo procedemos como sigue: si las funciones de correlación del baño térmico decaen “rápidamente”, llamemos este tiempo de correlación τ_B , la integral en la ecuación 4.16 estará determinada principalmente por la integración para s 's cercanos a t , de esta forma es aceptable cambiar $\rho_S(s)$ por $\rho_S(t)$ y así tendremos una ecuación *local* en el tiempo, lo que simplifica enormemente la parte analítica del problema. Se podrá decir que τ_B es pequeño si $\tau_B \ll \tau_R$, donde τ_R es el tiempo de relajación del sistema. Sin embargo la ecuación que obtenemos todavía depende de la escogencia del tiempo inicial, pero por el mismo argumento anterior el límite inferior se puede extender a $-\infty$, y haciendo el cambio $s \rightarrow t - s$ finalmente obtenemos

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^\infty dstr_B[H_I(t), [H_I(t-s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]] \quad (4.17)$$

Este último par de aproximaciones se conocen como la aproximación de Markov, en la que principalmente lo que se asume es que la evolución del sub-sistema en un tiempo t no depende de los estados en tiempos anteriores, sino únicamente del estado del sistema en el tiempo t . Por esto se dice que la aproximación de Markov supone una evolución sin memoria. Al hacer la aproximación de Markov se pierden los aspectos de la dinámica del sistema que duren tiempos menores a τ_B , es decir, para tiempos menores a τ_B no se pueden esperar resultados fiables. Al asumir la factorizabilidad de la matriz densidad para todo tiempo, se supone que las excitaciones del baño térmico duran menos que τ_B .

¹Esta condición se cumple para la gran mayoría de los casos, mas adelante se verán ejemplos donde todos los momentos impares de $H_I(t)$ son cero.

4.2. Dinámica No-Markoviana

Los efectos No-Markovianos o de memoria no son inherentes a los postulados de la física. De hecho la ecuación de Schrödinger la podemos llamar Markoviana, ya que la rata de cambio del estado de un sistema no depende sino del estado en ese momento, y no de lo ocurrido en tiempos pasados. Igualmente en la física clásica las ecuaciones de Newton son locales en el tiempo. La dinámica No-Markoviana se presenta como resultado de eliminar los grados de libertad del baño térmico. En ciertas ocasiones estos efectos cobran gran importancia como veremos en un ejemplo en el que la aproximación de Markov no es aplicable.

La mayoría de los análisis experimentales en sistemas abiertos que se han hecho hasta el momento utilizan teorías Markovianas, debido a que han sido ampliamente estudiadas y porque la escala de tiempos que se puede resolver en los experimentos es mayor que los tiempos típicos de correlación de los baños térmicos. Mas sin embargo últimamente debido principalmente a los esfuerzos por desarrollar la computación cuántica las técnicas experimentales están mejorando rápidamente, lo que hace preciso interesarse por teorías No-Markovianas. Aparte de los retos experimentales también es deseable conocer el proceso de decoherencia en los sistemas usados para crear un procesador cuántico, ya que la decoherencia es el principal obstáculo para el desarrollo en este tema. Se espera que la teoría arroje luces para lograr mayores tiempos de decoherencia. A continuación veremos dos técnicas perturbativas para solucionar la ecuación de Liouville-von Neumann teniendo en cuenta efectos de memoria.

4.2.1. Técnica Nakajima-Zwanzig

Las técnicas presentadas aquí fueron creadas por Nakajima [18], Zwanzig [19] e independientemente por Prigogine [20]. Las dos técnicas, la Nakajima-Zwanzig y la time-convolutionless (TCL) se basan en el uso de un operador proyección \mathcal{P} , que elimina los grados de libertad del baño, dejando solamente información sobre la parte importante del sistema.

El problema más general se puede plantear de la siguiente forma: se tiene un sistema de interés que interactua con un baño térmico a través del Hamiltoniano $\alpha\hat{H}_I(t)$, siendo α un parámetro que indica la “fuerza” del acople, y la evolución del sistema total, sin acople, está dada por \hat{H}_0 . Comenzaremos con la ecuación Liouville-von Neumann en la imagen de interacción,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i\alpha[H_I(t), \rho(t)] = \alpha\mathcal{L}(t)\rho(t), \quad (4.18)$$

donde se ha suprimido el subíndice I en la matriz densidad, en búsqueda de claridad notacional. Ahora definimos el operador proyección,

$$\mathcal{P}\rho \equiv tr_B\{\rho\} \otimes \rho_B = \rho_S \otimes \rho_B \quad (4.19)$$

donde ρ_B es un estado arbitrario fijo del baño térmico (usualmente se escoge un estado de equilibrio). Definimos el correspondiente operador proyección a la parte irrelevante,

$$\mathcal{Q}\rho \equiv \rho - \mathcal{P}\rho \quad (4.20)$$

La idea es ahora obtener una ecuación para la parte relevante, i.e. para $\mathcal{P}\rho(t)$. Para esto aplicamos \mathcal{P} y \mathcal{Q} a la ecuación 4.18,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) = \alpha\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\rho(t), \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\rho(t) = \alpha\mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\rho(t), \quad (4.22)$$

al lado derecho de las dos ecuaciones anteriores aparece $\mathcal{L}(t)\rho(t)$, así que introducimos la identidad, $I = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$, entre el Liouvilliano y $\rho(t)$, para que aparezca $\mathcal{P}\rho(t)$,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) = \alpha\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{P}\rho(t) + \alpha\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{Q}\rho(t), \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\rho(t) = \alpha\mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\mathcal{P}\rho(t) + \alpha\mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\mathcal{Q}\rho(t), \quad (4.24)$$

Ahora podemos solucionar de 4.24 para $\mathcal{Q}\rho(t)$ para luego introducirlo en 4.23,

$$\mathcal{Q}\rho(t) = \mathcal{G}(t, 0)\mathcal{Q}\rho(0) + \alpha \int_0^t ds \mathcal{G}(t, s)\mathcal{Q}\mathcal{L}(s)\mathcal{P}\rho(s) \quad (4.25)$$

donde $\mathcal{G}(t, s)$ es el siguiente “propagador”,

$$\mathcal{G}(t, s) = T_{\leftarrow} e^{\alpha \int_s^t ds' \mathcal{Q}\mathcal{L}(s')} \quad (4.26)$$

donde T_{\leftarrow} es el operador de ordenamiento cronológico. Ahora, insertando 4.25 en 4.23,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) &= \alpha\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{P}\rho(t) + \alpha\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{G}(t, t_0)\mathcal{Q}\rho(t_0) + \\ &+ \alpha^2 \int_0^t ds \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{G}(t, s)\mathcal{Q}\mathcal{L}(s)\mathcal{P}\rho(s), \end{aligned} \quad (4.27)$$

Esta ecuación es el punto de partida para obtener ecuaciones aproximadas para $\rho_s(t)$. El proceso se basa en expandir en potencias de α los operadores $\mathcal{G}(t, t')$. Por este método obtenemos a segundo orden la aproximación de Born (eq. 4.16), asumiendo que $tr_B[H_I(t), \rho_I(0)] = 0$ (lo que asumimos anteriormente) y que inicialmente la matriz densidad es factorizable, i.e. $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B$ (lo que asumimos anteriormente); por la primera suposición el primer término de 4.27 se hace cero, y por la segunda el segundo término se hace cero, y a orden más bajo $\mathcal{G}(t, t_0) = I$, así que tenemos,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) = \alpha^2 \int_0^t ds \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{Q}\mathcal{L}(s)\mathcal{P}\rho(s) \quad (4.28)$$

y usando las definiciones de \mathcal{P} y \mathcal{Q} , finalmente,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\alpha^2 \int_0^t dstr_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]] \quad (4.29)$$

ecuación que obtuvimos anteriormente de forma más directa. Aunque el método de Nakajima-Zwanzig (NZ) no simplifica los cálculos, si nos provee un desarrollo perturbativo que se puede calcular algorítmicamente.

4.2.2. Técnica TCL

La mayor desventaja de la ecuación 4.27 es que no es local en el tiempo. De hecho la expansión en α hasta la potencia n contiene términos con $n - 1$ integrales, lo que hace generalmente, muy complicados los cálculos analíticos y muy demorados los cálculos numéricos, para los que se requeriría gran potencial computacional. El valor de la técnica TCL es que ofrece una ecuación local en el tiempo, a costo de que el rango de tiempo y de parámetros α para los que es válida se vea reducido, precio que no se paga en la técnica NZ.

La dependencia para tiempos pasados en la técnica NZ proviene del término $\mathcal{P}\rho(s)$ en la ecuación 4.25. Para deshacernos de este término podemos integrar directamente la ecuación de Liouville, i.e.,

$$\rho(t) = T_{\leftarrow} e^{\alpha \int_s^t ds' \mathcal{L}(s')} \rho(s) \quad (4.30)$$

despejando $\rho(s)$

$$\rho(s) = T_{\rightarrow} e^{-\alpha \int_s^t ds' \mathcal{L}(s')} \rho(t) = G(t, s) \rho(t) \quad (4.31)$$

con $G(t, s) = T_{\rightarrow} \exp(-\alpha \int_s^t ds' \mathcal{L}(s'))$. Ahora, introduciendo $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ entre $G(t, s)$ y $\rho(t)$ en 4.31 e insertando $\rho(s)$ en 4.25, y luego de organizar términos se obtiene,

$$[1 - \Sigma(t)] \mathcal{Q}\rho(t) = \mathcal{G}(t, 0) \mathcal{Q}\rho(0) + \Sigma(t) \mathcal{P}\rho(t) \quad (4.32)$$

donde

$$\Sigma(t) = \alpha \int_0^t ds \mathcal{G}(t, s) \mathcal{Q}\mathcal{L}(s) \mathcal{P}G(t, s) \quad (4.33)$$

De la ecuación 4.32 podemos despejar $\mathcal{Q}\rho(t)$ en función de condiciones iniciales y de $\mathcal{P}\rho(t)$, siempre y cuando $[1 - \Sigma(t)]$ tenga inversa lo que desafortunadamente no siempre ocurre. Sin embargo, para tiempos y/o α 's “pequeños” $[1 - \Sigma(t)]$ si tiene inversa. Suponiendo que este es el caso y reemplazando $\mathcal{Q}\rho(t)$ de 4.32 en 4.23, se obtiene la siguiente ecuación local en el tiempo

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}\rho(t) = \mathcal{K}(t) \mathcal{P}\rho(t) + \mathcal{I}(t) \mathcal{Q}\rho(0), \quad (4.34)$$

donde

$$\mathcal{K}(t) = \alpha \mathcal{P} \mathcal{L}(t) [1 - \Sigma(t)]^{-1} \mathcal{P} \quad (4.35)$$

y

$$\mathcal{I}(t) = \alpha \mathcal{P} \mathcal{L}(t) [1 - \Sigma(t)]^{-1} \mathcal{G}(t, 0) \mathcal{Q} \quad (4.36)$$

Al igual que en la técnica NZ, en la ecuación 4.34 los coeficientes $\mathcal{K}(t)$ e $\mathcal{I}(t)$ se pueden expandir en potencias de α , siendo esta la forma de obtener una ecuación local en el tiempo de forma perturbativa.

Si se cumple que las condiciones iniciales son factorizables ($\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B$) se puede hallar una forma general de expandir el coeficiente $\mathcal{K}(t)$, y en ese caso la inhomogeneidad se hace cero. La idea es poder escribir

$$\mathcal{K}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n K_n(t) \quad (4.37)$$

Se encuentran los siguientes $K_n(t)$,

$$K_n(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \langle \mathcal{L}(t) \mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_2) \cdots \mathcal{L}(t_{n-1}) \rangle_{oc} \quad (4.38)$$

siendo

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{L}(t) \mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_2) \cdots \mathcal{L}(t_{n-1}) \rangle_{oc} \\ &= \sum (-1)^q \mathcal{P} \mathcal{L}(t) \cdots \mathcal{L}(t_i) \mathcal{P} \mathcal{L}(t_i) \cdots \mathcal{L}(t_k) \mathcal{P} \mathcal{L}(t_l) \cdots \mathcal{L}(t_m) \mathcal{P} \cdots \mathcal{P} \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde la suma se hace de la siguiente forma: se escriben n \mathcal{L} 's entre dos \mathcal{P} 's, luego se insertan q \mathcal{P} 's entre las \mathcal{L} 's, se multiplica por $(-1)^q$. A la primera \mathcal{L} se le asigna el argumento temporal t , y luego se asigna a las \mathcal{L} 's los $n - 1$ argumentos temporales restantes, t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , de manera descendente entre dos \mathcal{P} 's, pero sin necesaria relación con los argumentos entre las siguientes \mathcal{P} 's, i.e. $t \geq \dots \geq t_i, t_j \geq \dots \geq t_k, t_l \geq \dots \geq t_m, \dots$; finalmente se suma sobre todas las posibles configuraciones.

Anteriormente vimos que con la técnica NZ a segundo orden se obtiene la aproximación de Born. Es fácil ver que a segundo orden con TCL se obtiene la aproximación de Born-Markov (sin extender la integral hasta ∞). Esto muestra que al hacer el cambio $\rho_S(s) \rightarrow \rho_S(t)$ no se pierde precisión ya que las dos aproximaciones son a segundo orden en α .

Para una revisión más completa de los temas tratados en este capítulo ver la referencia [21]

Sistema Spin-Star

H. P. Breuer *et al.* [22] publicaron el siguiente ejemplo que es de gran interés ya que tiene dos particularidades: primero, se puede resolver analíticamente y

segundo, la aproximación de Born-Markov no es aplicable. Por estas razones el uso de las técnicas TCL y NZ en este problema resulta educacionalmente apreciado. Adicionalmente, aunque el sistema es muy simple, puede servir como base para estudios posteriores sobre el comportamiento de qubits en baños térmicos de spins, los que últimamente han despertado gran interés.

Considérese un sistema, central, de dos niveles (ei. qubit, spin, etc...) rodeado de N sistemas de dos niveles similares a él. Estos N sistemas harán las veces de baño térmico. Usaremos la notación de momentum angular para describir la interacción entre los sistemas de dos niveles y por extensión los llamaremos spins. El modelo usado por Breuer *et al.* utiliza una iteracción tipo Heisenberg XX entre el spin central y los spins periféricos, es decir,

$$H = 2\alpha(\sigma_+ \otimes \sum_{i=1}^N \sigma_-^i + \sigma_- \otimes \sum_{i=1}^N \sigma_+^i) \quad (4.40)$$

donde $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ siendo $\sigma_{x,y}$ las matrices de Pauli para el spin central, σ_{\pm}^i son los correspondientes operadores para el i -ésimo spin periférico y α es una constante que indica la “fuerza” del acople.

Por conveniencia definimos el operador de momentum angular total para los spins periféricos,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\sigma}^i, \quad (4.41)$$

así podemos especificar el estado del baño térmico usando una base de estados $|j, m, \nu\rangle$ donde m es valor propio de la componente z de \mathbf{J} y $j(j+1)$ el valor propio de \mathbf{J}^2 y con ν se cuenta el degeneramiento de los estados con j y m iguales.

Sea $\rho(t)$ la matriz densidad para el sistema total. Dada una condición inicial $\rho(t)$ se puede conocer resolviendo la correspondiente ecuación de Liouville-von Neumann,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \alpha\mathcal{L}\rho(t) \quad (4.42)$$

con $\mathcal{L} = -\frac{i}{\alpha}[H, \cdot]$. La meta es encontrar $\rho_S(t) \equiv tr_B\{\rho(t)\}$ de 4.42. Empecemos escribiendo la solución formal de la ecuación de Liouville-von Neumann,

$$\rho_S(t) = tr_B\{e^{\alpha\mathcal{L}t}\rho(0)\} \quad (4.43)$$

Es usual parametrizar las matrices densidad para sistemas de dos niveles usando el vector de Bloch, $\mathbf{v}(t)$,

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} \equiv tr_S\{\boldsymbol{\sigma}\rho_s(t)\}$$

de donde se deduce que

$$\rho_S(t) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{1+v_3(t)}{2} & v_-(t) \\ v_+(t) & \frac{1-v_3(t)}{2} \end{pmatrix}$$

con $v_{\pm}(t) = \frac{1}{2}(v_1(t) \pm iv_2(t))$.

Asumiendo que el estado inicial del spin central es el más general posible, es decir

$$\rho_S(0) = \begin{pmatrix} \frac{1+v_3(0)}{2} & v_-(0) \\ v_+(0) & \frac{1-v_3(0)}{2} \end{pmatrix},$$

y que el baño de spins inicialmente está no polarizado (temperatura infinita), siendo I_B la identidad en el espacio de Hilbert de los N spins periféricos,

$$\rho_B(0) = \frac{I_B}{2^N} \quad (4.44)$$

se encuentra la siguiente solución analítica [22],

$$v_{\pm}(t) = f_{12}(t)v_{\pm}(0) \quad (4.45)$$

$$v_3(t) = f_3(t)v_3(0) \quad (4.46)$$

con

$$f_{12}(t) = \sum_{j,m} n(j, N) \frac{\cos [2h(j, m)\alpha t] \cos [2h(j, -m)\alpha t]}{2^N} \quad (4.47)$$

$$f_3(t) = \sum_{j,m} n(j, N) \frac{\cos [4h(j, m)\alpha t]}{2^N} \quad (4.48)$$

donde $h(j, m) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$ y $n(j, N) = \frac{1}{N/2+j+1} \binom{N}{\frac{N}{2}-j}$.

En el caso en que $N \rightarrow \infty$, renormalizando $\alpha \rightarrow \alpha/\sqrt{N}$, se tienen las siguientes soluciones,

$$f_{12}(t) = 1 + g(t) \quad (4.49)$$

$$f_3(t) = 1 + 2g(t) \quad (4.50)$$

con

$$g(t) = ie^{-2\alpha^2 t^2} \sqrt{\frac{\pi\alpha^2 t^2}{2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{2}\alpha t) \quad (4.51)$$

donde $\operatorname{erf}(x)$ es la función Error. Nótese que $g(t)$ siempre es *real*.

Las figuras 4.2 y 4.3 muestran las gráficas de $f_{12}(t)$ y $f_3(t)$ para diferentes números de spins periféricos superpuestas con las gráficas para el límite $N \rightarrow \infty$.

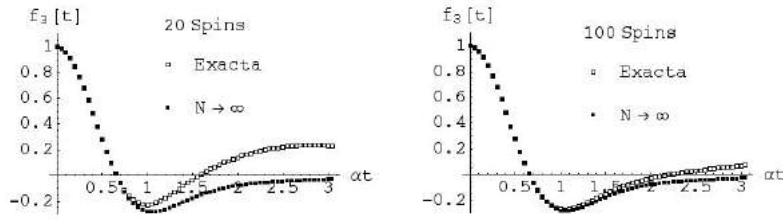


Figura 4.2: Gráfica de $f_3(t)$ para 20 y 100 spins en el baño, comparada con el límite $N \rightarrow \infty$.

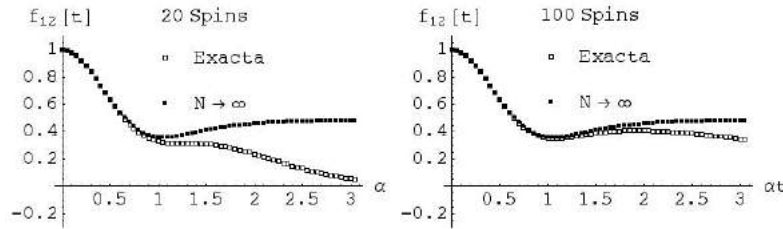


Figura 4.3: Gráfica de $f_{12}(t)$ para 20 y 100 spins en el baño, comparada con el límite $N \rightarrow \infty$.

Al hacer las gráficas se tomó $\alpha = 1/\sqrt{N}$, y el tiempo se mide en unidades de $[1/\alpha]$

Es interesante notar que cuando $N \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow \infty$, $f_{12}(t)$ y $f_3(t)$ tienden asintóticamente a $\frac{1}{2}$ y 0. Sin embargo para cualquier N finito $f_{12}(t)$ y $f_3(t)$ “oscilan” sin tender a algún valor, ver figura 4.4, esto se debe a la finitud de los grados de libertad del baño térmico, lo que permite devolver “información” al spin central. Este sistema es tan particular que con un baño infinito las coherencias decaen solamente a la mitad de su valor inicial. Sin embargo para $N = 40$, figura 4.4, para tiempos mayores a 10 las coherencias tienen valores entre $-0,2$ y $0,2$.

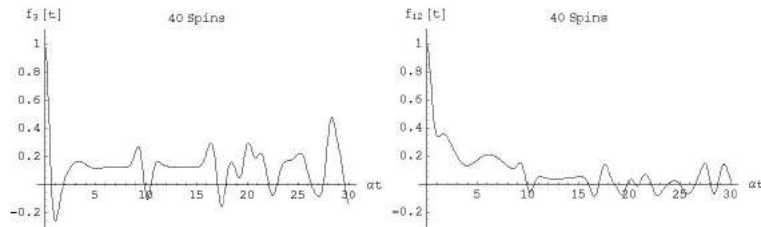


Figura 4.4: $f_3(t)$ y $f_{12}(t)$ para 40 spins en el baño.

Aprovechando que se tienen soluciones analíticas se puede comprobar el funcionamiento de las aproximaciones. Como el Hamiltoniano de este sistema *no depende del tiempo en la imagen de interacción*, las funciones de correlación del baño térmico tampoco van a depender del tiempo, por consiguiente la aproximación de Markov² no es aplicable. Veamos ahora el comportamiento de los resultados usando las técnicas TCL y NZ. Es conveniente anotar un par de cosas: primero, las inhomogeneidades de las ecuaciones 4.27 y 4.34 (técnicas NZ y TCL respectivamente) se hacen cero por haber supuesto condiciones iniciales factorizables; segundo, todos los momentos impares del Liouvilliano son cero, $\text{tr}_B\{\mathcal{L}^{2n+1}\rho_B\} = 0$ y tercero, que en este caso al tener el Hamiltoniano solamente término de interacción, la *imagen de interacción* es igual a la *imagen de Schrödinger*, por esto se pueden aplicar directamente los resultados de las secciones 4.2.1 y 4.2.2 para compararlos con las soluciones exactas.

Con la técnica NZ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{v}_{\pm}(t) = \left(\sum \alpha^{2n} \tilde{s}_{2n} \mathcal{I}_n(t, \tau) \right) v_{\pm}(\tau) \quad (4.52)$$

$$\dot{v}_3(t) = \left(\sum 2\alpha^{2n} \tilde{q}_{2n} \mathcal{I}_n(t, \tau) \right) v_3(\tau) \quad (4.53)$$

donde \tilde{s}_{2n} y \tilde{q}_{2n} son polinomios de grado n en N y $\mathcal{I}_n(t, \tau)$ es el siguiente operador,

$$\mathcal{I}_n(t, \tau) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-3}} dt_{n-2} \int_0^{t_{n-2}} d\tau \quad (4.54)$$

y con la técnica TCL se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{v}_{\pm}(t) = \left(\sum \alpha^{2n} \frac{s_{2n} t^{2n}}{(2n-1)!} \right) v_{\pm}(t) \quad (4.55)$$

$$\dot{v}_3(t) = \left(\sum 2\alpha^{2n} \frac{q_{2n} t^{2n}}{(2n-1)!} \right) v_3(t) \quad (4.56)$$

con s_{2n} y q_{2n} polinomios de grado n en N .

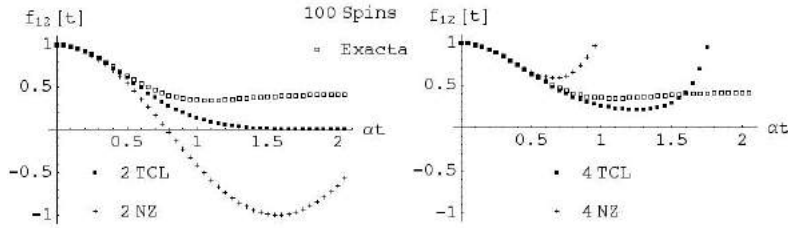


Figura 4.5: Aproximaciones a segundo y cuarto orden para $f_{12}(t)$.

²Concretamente extender la integración hasta ∞ .

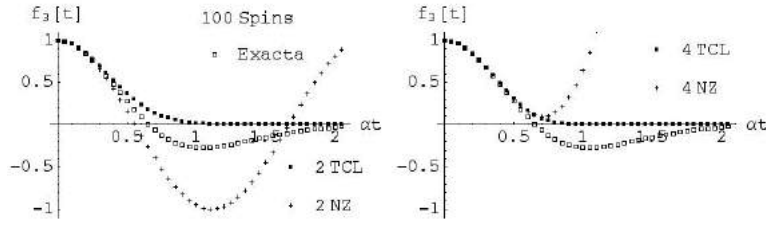


Figura 4.6: Aproximaciones a segundo y cuarto orden para $f_3(t)$.

La figura 4.5 muestra las gráficas de las aproximaciones TCL y NZ a segundo y cuarto orden para $f_{12}(t)$, superpuestas a la solución exacta, y la figura 4.6 muestra las gráficas para $f_3(t)$.

Es sorprendente notar que con la técnica TCL se obtienen mejores resultados que con la técnica NZ, al menos para $f_{12}(t)$, aunque se usen ecuaciones *no locales* en el tiempo y que el trabajo computacional sea mucho mayor que para TCL. Esto no quiere decir que la técnica TCL siempre sea más exacta que la NZ, esto solamente es una particularidad de este ejemplo.

En las ecuaciones 4.55 y 4.56 se puede ver que cuando v_{\pm} ó v_3 tomen el valor 0, estas funciones seguirán siendo cero para siempre, lo que se muestra en la figura 4.6. Este comportamiento se debe a que el operador $\mathcal{K}(t)$ (ecuación 4.34), deja de tener inversa, desventaja de la técnica TCL que se advirtió anteriormente.

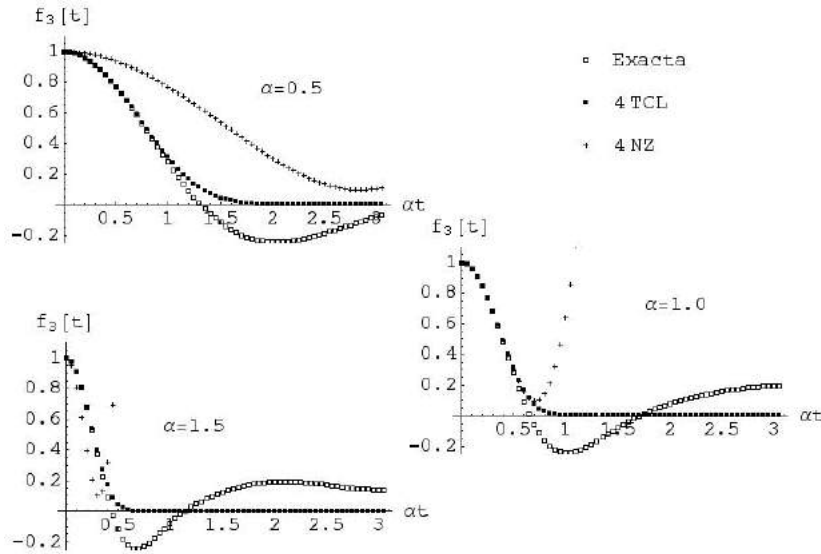


Figura 4.7: Comparación para diferentes α 's de $f_3(t)$

Finalmente, en la figura 4.7 mostramos el comportamiento de las aproximaciones para diferentes α 's, en donde se ve que a menor α mejor es la aproximación, tal como es de esperar.

Capítulo 5

Junturas Josephson: Dinámica No-Markoviana

Es el momento de volver a las junturas Josephson que introdujimos en el capítulo 3, ahora con el propósito de aplicar las técnicas desarrolladas en el capítulo anterior. Nos interesaremos principalmente en la dinámica a tiempos “cortos”, ya que es allí donde se esperan comportamientos No-Markovianos, es decir donde los efectos de memoria van a ser importantes.

5.1. Oscilador Anarmónico

A junturas Josephson circulares, como la esquematizada en la figura 5.1, últimamente se les ha prestado gran interés, ya que se ha mostrado que es posible observar en ellas la interferencia de dos estados cuánticos macroscópicos o más estrictamente mesoscópicos, i.e. gatos de Schrödinger.

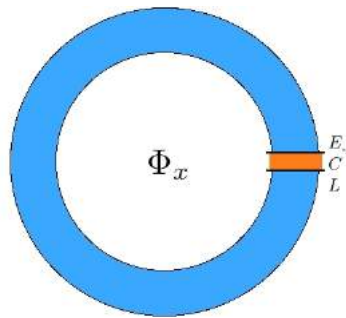


Figura 5.1: Junta Josephson mesoscópica. Se muestra un anillo superconductor, de inductancia L , al que se le ha incrustado una barrera aislante que se comporta como una capacitancia.

J. Zou y B. Shao [23] han estudiado extensamente este tipo de juntas, bajo la aproximación de Born-Markov. En esta sección presentaremos un análisis No-Markoviano usando la técnica TCL.

El Modelo

Se tiene una junta como la de la figura 5.1 a temperatura cero, en presencia de un campo magnético constante de tal forma que la junta encierra un flujo Φ_x . Este sistema está descrito por el siguiente Hamiltoniano ($\hbar = 1$, $k_B = 1$ y $c = 1$),

$$\hat{H} = \frac{\hat{q}^2}{2C} - E_J \cos \hat{\theta} + \frac{(\hat{\phi} + \Phi_x)^2}{2L} \quad (5.1)$$

siendo \hat{q} la carga en la capacitancia y $\hat{\theta}$ la diferencia de fase a través de la junta. Los dos primeros términos dan cuenta de la energía en la capacitancia C y de la energía de tunelamiento, mientras el tercero es la energía “almacenada” en la inductancia debida al campo magnético, donde $\hat{\phi}$ es el operador campo magnético creado por la junta, relacionado con la fase por $\hat{\theta} = 2e\hat{\phi}$. Por consiguiente $\hat{\phi}$ y \hat{q} cumplen la relación de conmutación $[\hat{\phi}, \hat{q}] = i$.

En el caso en que $\langle \hat{\theta} \rangle \ll 2\pi$ [24], se puede expandir el Hamiltoniano 5.1 en potencias de $\hat{\phi}$. Hasta cuarto orden se tiene,

$$\hat{H} = \frac{\hat{q}^2}{2C} + \frac{C}{2}\omega^2\hat{\phi}^2 + \frac{\hat{\phi}\Phi_x}{L} - \frac{2}{3}E_J(e\hat{\phi})^4 \quad (5.2)$$

donde $\omega^2 = \frac{1}{LC} + 4e^2\frac{E_J}{C}$. Los dos primeros términos de la ecuación anterior rememoran un oscilador armónico, en consecuencia definimos los operadores creación \hat{a}^\dagger y aniquilación \hat{a} ,

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\omega C}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (5.3)$$

$$\hat{q} = i\sqrt{\frac{\omega C}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (5.4)$$

de esta forma la ecuación 5.1, en la aproximación de onda rotante se puede reescribir,

$$\hat{H} = \Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \mu(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \nu(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 \quad (5.5)$$

con $\nu = \frac{e^4 E_J}{(\omega C)^2}$, $\mu = \frac{\Phi_x}{L\sqrt{2\omega C}}$ y $\Omega = \omega - \nu$.

Ahora debemos incluir la interacción con el medio ambiente. Modelamos el baño térmico con el que la junta interactúa como un conjunto infinito de osciladores armónicos independientes. El Hamiltoniano para el baño térmico será entonces

$$\hat{H}_B = \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \quad (5.6)$$

donde ω_k es la frecuencia del oscilador k y $\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_k$ son los operadores creación y aniquilación para el oscilador k . El acople de la juntura con un baño térmico lo modelaremos con el siguiente Hamiltoniano,

$$\hat{H}_I = -i(\hat{B} \otimes \hat{a}^\dagger - \hat{B}^\dagger \otimes \hat{a}) \quad (5.7)$$

siendo

$$\hat{B} = \sum_k g_k \hat{b}_k \quad (5.8)$$

donde g_k especifica la “fuerza” con que se acopla cada oscilador con la juntura. Este Hamiltoniano se obtiene al hacer la aproximación de onda rotante a un acople lineal entre la variable “posición” de la juntura ($\hat{a}^\dagger + \hat{a}$) y las variables posición del baño térmico ($\hat{b}^\dagger + \hat{b}$).

Técnica TCL en la Imagen de Schrödinger

Ya hemos planteado el problema, ahora aplicaremos la técnica TCL, pero antes haremos una pequeña modificación a los resultados de capítulo 4. Las técnicas TCL y NZ se desarrollaron en la imagen de interacción. Sin embargo para interpretar los resultados es preferible trabajar en la imagen de Schrödinger. Nuestra tarea en esta sección es transformar la ecuación 4.34,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P} \rho_I(t) = \mathcal{K}(t) \mathcal{P} \rho_I(t) + \mathcal{I}(t) \mathcal{Q} \rho_I(0), \quad (5.9)$$

de la imagen de interacción a la imagen de Schrödinger. En nuestro caso asumiremos condiciones iniciales factorizables, así la inhomogeneidad de la ecuación 5.9 se hace cero.

Recordemos,

$$\rho_I(t) = U_I(t, t_0) \rho(t_0) U_I^\dagger(t, t_0) = U_0^\dagger(t, t_0) \rho(t) U_0(t, t_0) \quad (5.10)$$

donde $\rho_I(t)$ es la matriz densidad en la imagen de interacción, $\rho(t)$ es la matriz densidad en la imagen de Schrödinger, y

$$U_0(t, t_0) = e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \quad (5.11)$$

donde \hat{H}_0 es el Hamiltoniano del sub-sistema mas el Hamiltoniano del baño térmico.

Derivando con respecto al tiempo el tercer término de la ecuación 5.10 tenemos,

$$\frac{d}{dt} \rho_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0) \left(i[H_0, \rho(t)] + \frac{d}{dt} \rho(t) \right) U_0(t, t_0). \quad (5.12)$$

Teniendo en cuenta que $\hat{H}_0 = \hat{H}_S + \hat{H}_B$, siendo \hat{H}_S y \hat{H}_B los Hamiltonianos del sistema y el baño respectivamente, al tomar la traza con respecto al baño en la ecuación anterior obtenemos,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_I(t) = e^{i\hat{H}_S(t-t_0)}\left(i[H_S, \mathcal{P}\rho(t)] + \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t)\right)e^{-i\hat{H}_S(t-t_0)} \quad (5.13)$$

Remplazando en la ecuación 5.9, teniendo en cuenta que la inhomogeneidad es cero y tomando $t_0 = 0$ para simplificar la notación,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) &= i[H_S, \mathcal{P}\rho(t)] + e^{-i\hat{H}_St}\{\mathcal{K}(t)\mathcal{P}\rho_I(t)\}e^{i\hat{H}_St} \\ \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) &= -i[H_S, \mathcal{P}\rho(t)] + \mathcal{K}'(t)\mathcal{P}\rho(t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Esta es la ecuación buscada. Nótese que $\mathcal{K}'(t)$ tiene la misma estructura que $\mathcal{K}(t)$, pero a los argumentos temporales de los operadores del sub-sistema se le debe restar t .

Evolución No-Markoviana

Analizaremos la dinámica del problema planteado con la técnica TCL hasta cuarto orden, es decir hallaremos los coeficientes K'_2 y K'_4 de la siguiente ecuación,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) = -i[H_S, \mathcal{P}\rho(t)] + (K'_2(t) + K'_4(t))\mathcal{P}\rho(t) \quad (5.15)$$

Usando la forma general para calcular los coeficientes K'_n (eq. 4.38 y 4.39) encontramos para K'_2 ,

$$K'_2(t)\mathcal{P}\rho(t) = \int_0^t dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}'(t)\mathcal{L}'(t_1)\rho(t)$$

$$K'_2(t)\mathcal{P}\rho(t) = - \int_0^t dt_1 \text{tr}_B [H'_I(t), [H'_I(t_1), \rho(t) \otimes \rho_B]] \otimes \rho_B \quad (5.16)$$

Recordemos que

$$H'_I(t') = e^{i\hat{H}_S(t'-t) + i\hat{H}_B t} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_S(t'-t) - i\hat{H}_B t}$$

por consiguiente,

$$H'_I(t') = -i(B(t') \otimes a^\dagger(t' - t) - B^\dagger(t') \otimes a(t' - t)) \quad (5.17)$$

donde

$$B(t) = \sum_k g_k \hat{b}_k e^{-i\omega_k t}, \quad a(t) = \hat{a} e^{-i(\Omega + \nu)t} e^{2i\nu \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \quad (5.18)$$

el problema se reduce ahora a expandir los dos conmutadores de la ecuación 5.16, y tomar la traza con respecto al baño.

Tomaremos ρ_B un estado de equilibrio, por consiguiente las funciones de correlación entre un tiempo t y un tiempo t' solo dependerán de la diferencia $t - t'$. También supondremos que ρ_B es gaussiano, es decir que todos los momentos impares con respecto a B y B^\dagger son cero¹ y que los momentos pares se pueden calcular como multiplicaciones y sumas entre los momentos de segundo orden.

Al desarrollar el álgebra nos encontramos reiteradamente con la siguiente función de correlación del baño térmico,

$$f(t - t_1) = \text{tr}_B \{ B(t) B(t_1) \rho_B \} \quad (5.19)$$

Al pasar al límite continuo en los estados del baño, es común expresar la función $f(t)$ en términos de la densidad espectral $J(\omega)$,

$$f(t - t_1) = \int d\omega J(\omega) e^{-i\omega(t-t_1)} \quad (5.20)$$

Normalmente se encuentra que el amortiguamiento, γ , producido por el baño térmico es independiente de la frecuencia ω cuando $\omega \rightarrow 0$. La densidad espectral con la que se obtiene esta propiedad es proporcional a ω y se conoce como *Ohmica*,

$$J(\omega) = \frac{2\gamma}{\pi} \omega, \quad \text{para } \omega \rightarrow 0 \quad (5.21)$$

mientras que para frecuencias altas se encuentra que el baño térmico produce renormalizaciones en los parámetros del sub-sistema. Este aspecto se consigue poniendo un corte a las frecuencias del baño. Es común utilizar el corte Lorentz-Drude,

$$J(\omega) = \frac{2\gamma}{\pi} \omega \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \omega^2} \quad (5.22)$$

donde λ es la “frecuencia de corte”. Teniendo en cuenta lo anterior, encontramos

$$f(t) = 2i\gamma\lambda^2 e^{-\lambda|t|} \times \text{Signo}[t] \quad (5.23)$$

Considerando la ecuación 5.23 podemos definir el tiempo de correlación del baño térmico como $\tau_B \equiv 1/\lambda$, mientras que el tiempo *propio* del sub-sistema lo podemos definir como $\tau_S \equiv 1/\Omega$ (ver ec. 5.5). Reconocemos entonces que la aproximación Markoviana será buena si se cumple que $\tau_B \ll \tau_S$, ie. $\lambda \gg \Omega$, en caso contrario debemos esperar efectos No-Markovianos. Sin embargo se debe tener en cuenta que en un análisis realístico se debe tomar λ al menos un orden de magnitud mayor que Ω .

Después de cierta álgebra se puede escribir $K_2'(t)\rho_S$ así,

¹Esta condición es equivalente a que los momentos impares de los operadores *observables* $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(B + B^\dagger)$ y $P = \frac{i}{\sqrt{2}}(B - B^\dagger)$ son cero.

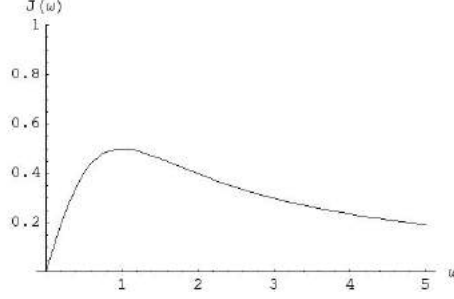


Figura 5.2: $J(\omega)$ para $\lambda = \frac{2\gamma}{\pi} = 1$

$$K_2'(t)\rho_S = \widehat{\Phi}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho_S(t) - \widehat{\Upsilon}(t)\hat{a}\rho_S(s)\hat{a}^\dagger + \text{H.C.} \quad (5.24)$$

donde H.C indica el hermítico conjugado. $\widehat{\Phi}(t)$ y $\widehat{\Upsilon}(t)$ son operadores que dependen de \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Antes de proseguir a calcular el cuarto orden de la aproximación TCL veamos cómo de 5.24 llegamos a una ecuación Master en la aproximación de Born-Markov, en la forma de Lindblad².

Tenemos,

$$\widehat{\Phi}(t) = \int_0^t dt_1 e^{i(\Omega+\nu)t_1 - 2i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}t_1} f(t_1) \quad (5.25)$$

Sea $\Phi_n(t) = \langle n|\widehat{\Phi}(t)|n\rangle$, entonces,

$$\Phi_n(t) = \int_0^t dt_1 e^{i(\Omega+\nu)t_1 - 2i\nu n t_1} f(t_1) \quad (5.26)$$

integrando,

$$\Phi_n(t) = 2i\gamma\lambda \frac{1 - e^{-\lambda t(1 - i\omega_n/\lambda)}}{1 - i\omega_n/\lambda} \quad (5.27)$$

con $\omega_n = \Omega - (2n - 1)\nu$. Como hemos supuesto que la temperatura es cero, los n 's relevantes son pequeños, y además por lo general $\nu \ll \Omega$, así que $\omega_n \cong \Omega$. El límite Markoviano lo obtenemos cuando $t \rightarrow \infty$,

$$\Phi_{Markov}(t) = -\frac{2\gamma\Omega}{1 + (\Omega/\lambda)^2} + i2\gamma\lambda \frac{1}{1 + (\Omega/\lambda)^2} \quad (5.28)$$

Nótese que es independiente de n . Ahora, $\widehat{\Upsilon}(t)$ es,

$$\widehat{\Upsilon}(t) = \int_0^t dt_1 e^{i(\Omega+\nu)t_1 - 2i\nu\hat{a}\hat{a}^\dagger t_1} f(t_1) \quad (5.29)$$

²Ver [21] para la definición de “forma de Lindblad”.

se obtiene entonces en el límite Markoviano,

$$\Upsilon_{Markov}(t) = \Phi_{Markov}(t) = -\Gamma + i\Delta \quad (5.30)$$

Finalmente podemos escribir,

$$K'_2(t)\rho_S = i\Delta[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho_S] + \Gamma(2\hat{a}\rho_S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho_S - \rho_S\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (5.31)$$

donde identificamos a Δ como una renormalización de la frecuencia del oscilador y a Γ como la constante de amortiguamiento. La ecuación Master para nuestra juntura se resume así,

$$\frac{d}{dt}\rho_S = -i[\hat{H}_{(\Omega-\Delta)}, \rho_S] + \Gamma(2\hat{a}\rho_S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho_S - \rho_S\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (5.32)$$

Donde $\hat{H}_{(\Omega-\Delta)}$ es el Hamiltoniano de la juntura pero cambiando Ω por $\Omega-\Delta$.

En la figura 5.3 se muestra la gráfica de $\Phi_n(t)$, normalizada a sus valores Markovianos. Es importante notar que al hacer la aproximación Markoviana se pierde una gran cantidad de sutilezas para tiempos cortos, inclusive con respecto a segundo orden en TCL.

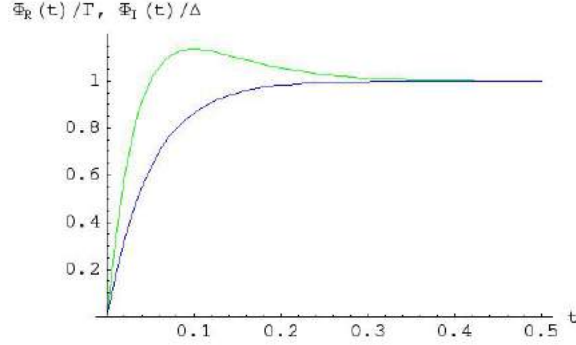


Figura 5.3: Parte real (línea superior, verde) y parte imaginaria (azul) de $\Phi_n(t)$, para $\nu = 0$, $\Omega = 1$ y $\lambda = 20$.

El cálculo de $K'_4(t)$ requiere más trabajo. De las ecuaciones 4.38 y 4.39 encontramos,

$$\begin{aligned} K'_4(t) = & \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 (\mathcal{P}\mathcal{L}'(t)\mathcal{L}'(t_1)\mathcal{L}'(t_2)\mathcal{L}'(t_3)\mathcal{P} \\ & - \mathcal{P}\mathcal{L}'(t)\mathcal{L}'(t_1)\mathcal{P}\mathcal{L}'(t_2)\mathcal{L}'(t_3)\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}'(t)\mathcal{L}'(t_2)\mathcal{P}\mathcal{L}'(t_1)\mathcal{L}'(t_3)\mathcal{P} \\ & - \mathcal{P}\mathcal{L}'(t)\mathcal{L}'(t_3)\mathcal{P}\mathcal{L}'(t_1)\mathcal{L}'(t_2)\mathcal{P}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

El desarrollo del álgebra es largo más no complicado, por esto solo mostraremos el resultado final. Para calcular los momentos de cuarto orden en los

operadores de baño B y B^\dagger hacemos uso reiterado de la propiedad gaussiana de ρ_B . En el caso general se tiene

$$\begin{aligned} \text{tr}_B\{\hat{O}_1\hat{O}_2\hat{O}_3\hat{O}_4\rho_B\} &= \text{tr}_B\{\hat{O}_1\hat{O}_2\rho_B\}\text{tr}_B\{\hat{O}_3\hat{O}_4\rho_B\} \\ &+ \text{tr}_B\{\hat{O}_1\hat{O}_3\rho_B\}\text{tr}_B\{\hat{O}_2\hat{O}_4\rho_B\} + \text{tr}_B\{\hat{O}_1\hat{O}_4\rho_B\}\text{tr}_B\{\hat{O}_2\hat{O}_3\rho_B\}, \end{aligned}$$

donde los \hat{O}_i son $B(t')$ ó $B^\dagger(t'')$. Usaremos la siguiente notación,

$$f_{ij} = \text{tr}_B\{B(t_i)B^\dagger(t_j)\rho_B\}$$

y

$$a_i = a(t_i - t) = \hat{a}e^{-i(\Omega + \nu - 2\nu\hat{a}^\dagger\hat{a})(t_i - t)} \quad \text{con} \quad t_0 = t.$$

Finalmente, el integrando de la ecuación 5.33 se puede escribir de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_4\rho_s &= f_{02}f_{13}\left(\rho_s a_3^\dagger[a_2^\dagger, a_1]a_0 + \rho_s[a_3^\dagger, a_2^\dagger a_1]a_0 \right. \\ &+ [a_3, a_1]\rho_s a_2^\dagger a_0^\dagger + [a_2, a_3]\rho_s a_1^\dagger a_0^\dagger + [a_2, a_1]\rho_s a_3^\dagger a_0^\dagger \\ &+ a_1\rho_s[a_2^\dagger, a_3^\dagger]a_0 + a_2\rho_s[a_3^\dagger, a_1^\dagger]a_0 + a_3\rho_s[a_2^\dagger, a_1^\dagger]a_0 \\ &\left. + [a_3, a_1^\dagger a_2]\rho_s a_0^\dagger + [a_2, a_1^\dagger]a_3\rho_s a_0^\dagger\right) + \text{H.C.} \end{aligned} \quad (5.34)$$

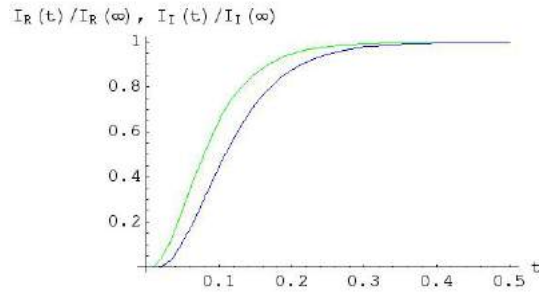


Figura 5.4: Parte real (línea superior, verde) y parte imaginaria (azul) de $I(t)$, para $\omega_i = 1$ y $\lambda = 20$.

Para darnos una idea de cómo se comporta el cuarto orden de la técnica TCL analicemos brevemente la forma de los coeficientes que aparecen al hacer las integrales de la ecuación 5.34. En general las integrales tendrán el siguiente formato,

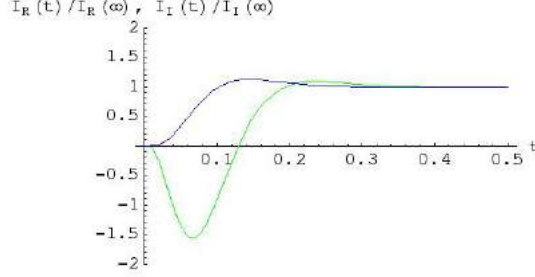


Figura 5.5: Parte real (verde) y parte imaginaria (azul) de $I(t)$, para $\omega_1 = 16$, $\omega_2 = 12$, $\omega_3 = 5$ y $\lambda = 20$.

$$I(t) = -4\gamma^2\lambda^4 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 e^{-\lambda(t_1+t_2-t_3)} e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \omega_3 t_3)} \quad (5.35)$$

donde los ω_i son frecuencias que dependen de Ω y ν . En las figuras 5.4 y 5.5 se muestran las gráficas de $I(t)$, normalizadas a sus valores cuando $t \rightarrow \infty$.

La gráfica 5.4 se realizó para parámetros comúnmente accesibles por la tecnología actual, mientras que en la gráfica 5.5 se escogieron parámetros menos comunes, sin embargo no se descarta que en los próximos años la técnica evolucione hasta el punto de poder alcanzar los parámetros supuestos. En tal caso las diferencias entre el comportamiento Markoviano y No-Markoviano serían más fácilmente detectables.

Simulación y Resultados

La juntura se prepara inicialmente en un estado coherente y después se deja evolucionar libremente.

Recordemos el Hamiltoniano de la juntura (ec. 5.5),

$$\hat{H} = \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \mu (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \nu (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2, \quad \mu = \frac{\Phi_x}{L\sqrt{2\omega C}}, \quad (5.36)$$

donde Ω y ν dependen de los parámetros de la juntura mas no de Φ_x . Para crear un estado coherente podemos escoger por un pequeño tiempo, τ , un campo magnético lo suficientemente grande de tal forma que $\nu \ll \mu$ y $\Omega \ll \mu$, y τ lo suficientemente pequeño para que la interacción con el baño térmico pueda despreciarse, es decir $\tau \ll 1/\lambda$. La figura 5.3 muestra que esto tiene sentido. Bajo el anterior régimen de parámetros, suponiendo que la juntura inicialmente está en el estado de vacío $|0\rangle$, en el tiempo τ evolucionará hasta el estado coherente

$$|\phi\rangle = e^{-i\mu\tau(\hat{a}^\dagger + \hat{a})}|0\rangle. \quad (5.37)$$

Debido a la gran cantidad de estados de carga posibles ($|n\rangle$), en esencia infinitos, para analizar la dinámica de este sistema es aconsejable usar *métodos de espacio de fase*, como por ejemplo la función $Q(\alpha)$,

$$Q(\alpha) = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m} \frac{\alpha^{*m} \alpha^n}{\sqrt{n!m!}} \langle m | \rho | n \rangle \quad (5.38)$$

donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente,

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}} |0\rangle \quad (5.39)$$

Para el presente caso tomaremos $\alpha = \sqrt{\frac{\omega C}{2}} \phi + i \sqrt{\frac{1}{2\omega C}} q$. $Q(\alpha)$ tiene la propiedad de ser positiva, acotada por 1 y normalizada a π . La parte real de α la llamaremos x y la parte imaginaria y . En la figura 5.6 se muestra la función $Q(x, y)$ para el estado inicial, para $\mu\tau = 2$.

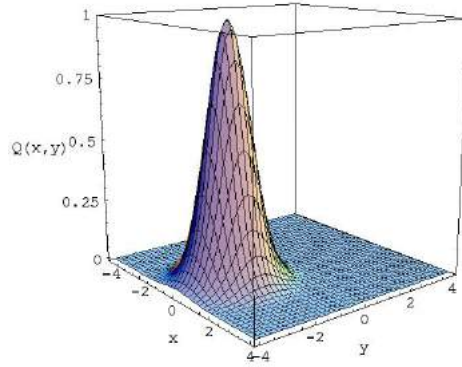


Figura 5.6: Función $Q(x, y)$, para el estado inicial para $\mu\tau = 2$.

Con ánimo ilustrativo mostramos en la figura 5.7 la formación de gatos de Schrödinger. Se escogieron parámetros que representen un sistema real. Zou *et al.* [23] reportan los siguientes valores accesibles por la tecnología actual, $L \sim 10^{-7}$ H, $C \sim 10^{-15}$ F, $\tau \sim 10^{-12}$ s, $\Phi_x > 10^{-15}$ Wb y $E_J \sim 0,01$ K.

En la escala arbitraria de tiempo que hemos elegido ($\Omega = 1$)³, los efectos No-Markovianos se esperan para tiempos menores a 1, ya que para tiempos mayores a 1 el sistema evolucionará de forma Markoviana, como la indica la figura 5.3.

En la figura 5.8 mostramos curvas de energía de la juntura para la evolución Markoviana (azul, cuadrados sin relleno) y la evolución con TCL a cuarto orden (verde, curva superior) siendo pequeño el acople con el medio, $\gamma = 0,001$. La técnica TCL muestra que inicialmente la derivada de la energía es cero, fenómeno

³Le hemos sumado Δ a Ω en la figura 5.7, de tal forma que la frecuencia “observada” sea 1.

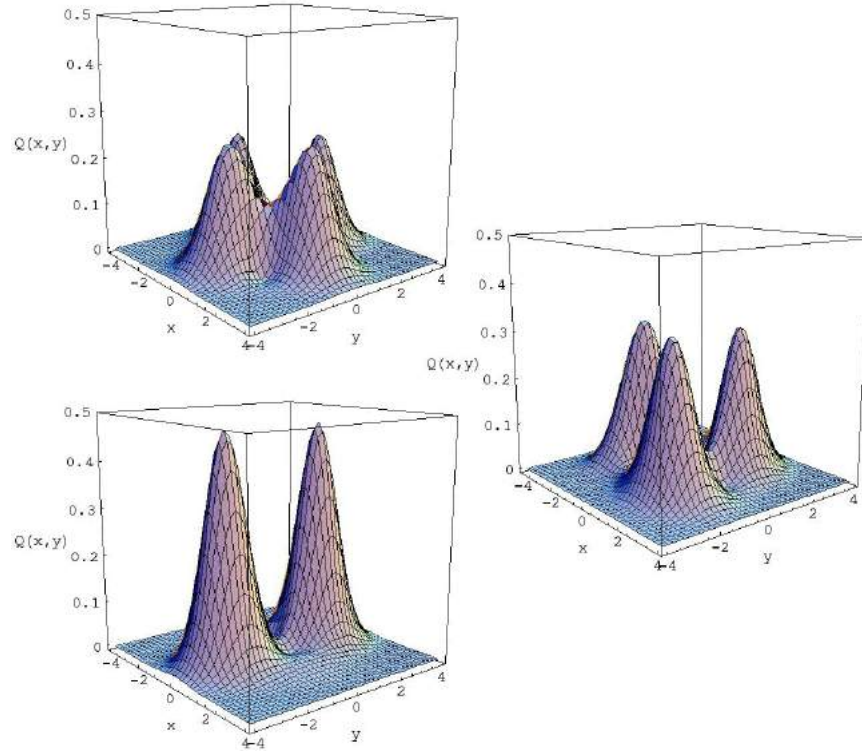


Figura 5.7: Función $Q(x, y)$, para los tiempos $2\pi/8\mu$, $3\pi/8\mu$ y $4\pi/8\mu$, donde se aprecia que la juntura presenta superposiciones de 4, 3 y 2 estados mesoscópicos coherentes. Se usaron $\Omega = 1 + \Delta$, $\nu = 0,05$, $\lambda = 20$, $\gamma = 0,001$.

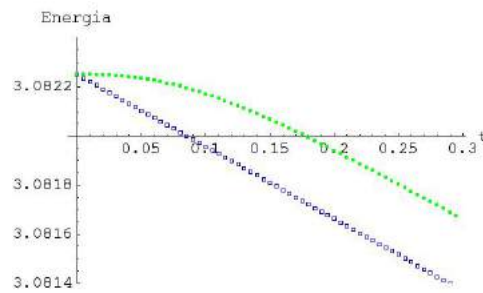


Figura 5.8: Energía de la juntura para $\gamma = 0,001$.

que la aproximación Markoviana no reproduce. Para tiempos mayores a 0.2 las dos curvas se vuelven paralelas, lo que indica que el sistema ha alcanzado el régimen Markoviano.

Si el acople es grande $\gamma = 1$, las diferencias se vuelven notables, como se ve en la figura 5.9. La técnica TCL muestra que el típico decaimiento exponencial predicho por la aproximación Markoviana está en gran desacuerdo con el comportamiento real del sistema. Sin embargo para $t \gg \tau_B = 1/\lambda$ la aproximación TCL se acerca a los resultados Markovianos.

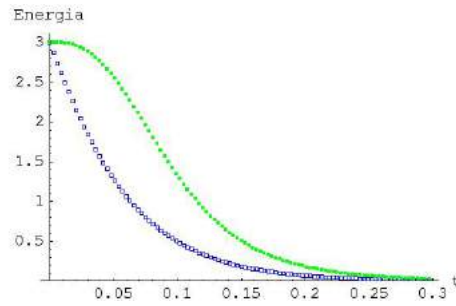


Figura 5.9: Energía de la junta para $\gamma = 1$.

Finalmente analizaremos el comportamiento de las poblaciones de los estados de carga (i.e. elementos diagonales de ρ_s). Las diferencias entre los resultados Markovianos, y No-Markovianos con TCL a orden 4 son evidentes. Inicialmente mostramos la población del estado base para un acople pequeño, figura 5.10. Comprobamos nuevamente que la aproximación Markoviana falla en la predicción de la derivada inicial, en este caso de la población de los estados de carga. Observamos nuevamente que para $t > 0,2$ las dos curvas se vuelven paralelas, indicando que el sistema ha alcanzado el régimen Markoviano.

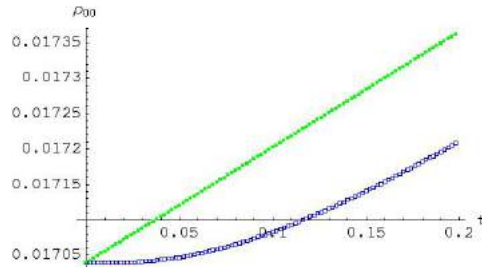


Figura 5.10: Población del estado base, ρ_{00} . Los cuadros sin relleno muestran TCL 4 (curva inferior) y los cuadros con relleno la evolución Markoviana. $\gamma = 0,01$.

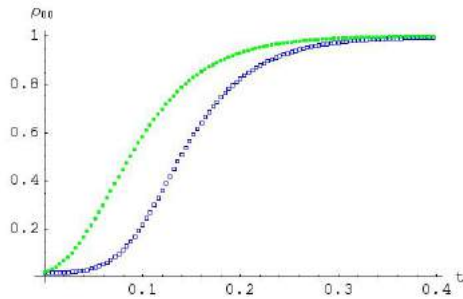


Figura 5.11: Población del estado base, ρ_{00} . Los cuadros sin relleno muestran TCL 4 (curva inferior) y los cuadros con relleno la evolución Markoviana. $\gamma = 1$.

En las figuras 5.11 y 5.12 mostramos la población del estado base y del segundo estado excitado, para el caso en el que el acople es grande $\gamma = 1$. Se muestra que la juntura decae al estado base, consecuencia natural de haber supuesto temperatura cero.

Uno de los propósitos principales para estudiar la dinámica No-Markoviana es ayudar a diseñar experimentos en los que se encuentren efectos de memoria. Una propuesta es medir la derivada temporal de diferentes cantidades (energía, poblaciones, etc...) para $t = 0$, claro está que esto implicaría que los tiempos de resolución de los experimentos fuesen del orden de τ_B .

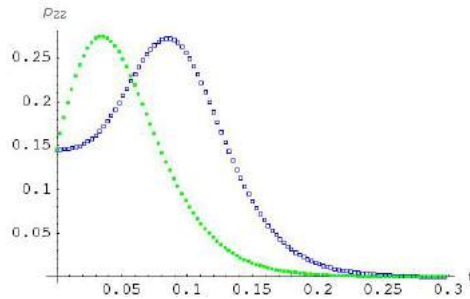


Figura 5.12: Población del segundo estado excitado, ρ_{22} . Los cuadros sin relleno muestran TCL 4 y los cuadros con relleno la evolución Markoviana. $\gamma = 1$.

Sin embargo pueden haber otras formas en las que no se requieran resoluciones temporales tan pequeñas. Por ejemplo la figura 5.12 nos muestra que si se conocen los parámetros del baño (i.e. γ y λ en nuestro modelo), el tiempo en el que la población del segundo estado excitado vuelve a su valor inicial puede ser un buen parámetro de “Markovianidad”. En nuestro caso el tiempo predicho por la aproximación Markoviana es cercano a un tercio del tiempo predicho por TCL.

5.2. Qubit Superconductor

La teoría de la computación cuántica se basa fuertemente en que la evolución de un sistema cuántico ideal está descrita de forma determinística y reversible por operadores unitarios, lo que permite hacer un gran número de manipulaciones coherentes sobre un gran número de qubits, siendo estas dos condiciones indispensables para hacer aplicaciones prácticas. Desafortunadamente el número de operaciones coherentes que se pueden realizar en un sistema real son limitadas por varios factores como por ejemplo errores en la preparación del estado inicial, acoples indeseados entre qubits, excitaciones que sacan a los qubits de un espacio de Hilbert de 2 dimensiones o las interacciones con el medio ambiente.

En esta sección estudiaremos la influencia del medio ambiente sobre los qubits superconductores que introdujimos en el capítulo 3.

El Modelo

Consideraremos un qubit superconductor, bien sea de carga o de flujo, que interactúa con el medio ambiente. Recordemos el Hamiltoniano libre del qubit, hallado anteriormente (eq. 3.5 y 3.6),

$$\hat{H}_Q = -\frac{1}{2}B_z\sigma_z - \frac{1}{2}B_x\sigma_x \quad (5.40)$$

donde $B_z = 4E_C(1 - 2n_g)$ para cualquier tipo de qubit superconductor considerado. B_x para un qubit de carga es E_J y para un qubit de flujo es $2E_J \cos\left(\pi\frac{\Phi_x}{\Phi_0}\right)$.

El medio ambiente lo modelaremos como infinitos osciladores armónicos que se acoplan al qubit por medio de una cavidad, como lo esquematiza la figura 5.13.

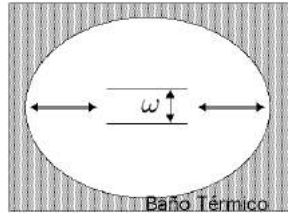


Figura 5.13: Representación esquemática del modelo Jaynes-Cummings

El Hamiltoniano total lo escribiremos de la siguiente forma,

$$\hat{H} = \hat{H}_Q + \frac{1}{2}\sigma_z \otimes \sum_k g_k x_k + \hat{H}_B \quad (5.41)$$

donde \hat{H}_B es el Hamiltoniano del baño térmico. El segundo término del lado derecho representa el Hamiltoniano de interacción. Los x_k son las variables posición de los osciladores del baño térmico, y los g_k son constantes que especifican la fuerza con que se acopla cada modo.

Para facilitar los cálculos posteriores es adecuado trabajar en la base que diagonaliza \hat{H}_Q , para lo cual hacemos el cambio de variables,

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \sin\frac{\delta}{2}|0\rangle - \cos\frac{\delta}{2}|1\rangle \\ |\downarrow\rangle &= \sin\frac{\delta}{2}|0\rangle + \cos\frac{\delta}{2}|1\rangle \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde $\tan\delta = B_x/B_z$. De esta forma el Hamiltoniano total queda escrito así,

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \frac{1}{2}(\sin(\delta)\sigma_x + \cos(\delta)\sigma_z) \otimes \sum_k g_k x_k + \hat{H}_B \quad (5.43)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{B_x^2 + B_z^2}$ y no debe haber confusión en que las matrices de Pauli se toman ahora con respecto a los estados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$. En la sección siguiente analizaremos la dinámica para dos casos límites, $B_z = 0$ y $B_x = 0$, ya que con estos dos casos se consigue una base completa para las operaciones unitarias en el espacio de spin, como se advirtió anteriormente.

Evolución No-Markoviana

Ahora nos dirigimos a plantear la ecuación de movimiento para la matriz densidad del qubit, ρ_Q , para lo cual debemos hallar los operadores $K'_2(t)$ y $K'_4(t)$ de la ecuación,

$$\frac{d}{dt}\rho_Q = -i[H_Q, \rho_Q] + (K'_2(t) + K'_4(t))\rho_Q. \quad (5.44)$$

Estudiemos primero el caso $B_z = 0$. El Hamiltoniano de interacción en la imagen de interacción resulta entonces,

$$H_I(t) = \frac{1}{2}\sigma_x(t) \otimes B(t) = \frac{1}{2}(\sigma_+ e^{-i\omega_0 t} + \sigma_- e^{i\omega_0 t}) \otimes B(t) \quad (5.45)$$

donde $B(t) = \sum_k g_k x_k(t)$. Un cálculo directo de $K_2(t)$ resulta en,

$$K'_2(t) = -\int_0^t dt_1 \frac{1}{4} \left\{ \nu[\sigma_x, [\sigma_x(t_1 - t), \rho_Q]] + i\eta[\sigma_x, \{\sigma_x(t_1 - t), \rho_Q\}] \right\} \quad (5.46)$$

donde,

$$\nu + i\eta = \text{tr}_B \{ B(t_1) B(0) \rho_B \}. \quad (5.47)$$

Así como en el caso del oscilador anarmónico podemos calcular la anterior función de correlación por medio de una densidad espectral,

$$\nu + i\eta = \int d\omega J(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (5.48)$$

Nos restringiremos al caso en que el qubit se acopla a un solo modo de la cavidad, lo que nos lleva a considerar la densidad espectral

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma\lambda^2}{(\omega_0 - \Delta - \omega)^2 + \lambda^2}. \quad (5.49)$$

Este modelo se conoce con el nombre de Jaynes-Cummings originalmente propuesto por estos investigadores para estudiar analíticamente el problema básico de la Óptica Cuántica como es el de la interacción de la radiación con la materia [25]. λ es un parámetro que define el ancho espectral del acople y, como se verá inmediatamente, será el inverso del tiempo de correlación del baño térmico y γ especifica la fuerza del acople, identificándose también como el inverso del tiempo de relajación del qubit. Δ es el desfase que pueda existir entre la frecuencia del qubit (ω_0) y la frecuencia de la cavidad con la cual está acoplado. Haciendo la integral en la ecuación 5.48 encontramos,

$$\nu(t) + i\eta(t) = \gamma\lambda e^{-\lambda|t| + i(\Delta - \omega_0)t}. \quad (5.50)$$

Se debe anotar que en la mayoría de los casos reales la densidad espectral adecuada debe ser óhmica con algún tipo de corte, por ejemplo Lorentz-Drude. Sin embargo para simplificar los cálculos nos hemos decidido por el modelo Jaynes-Cummings lo que no representa ninguna desventaja teórica. De hecho la ecuación 5.50 muestra gran versatilidad, como se verá posteriormente, al poderse modular independientemente λ y Δ .

Para analizar este sistema es conveniente parametrizar la matriz densidad ρ_Q con el vector de Bloch, $\mathbf{v}(t) = \text{tr}_Q\{\boldsymbol{\sigma}\rho_Q\}$, como se hizo en el ejemplo del Spin-Star. Recordemos,

$$\rho_Q(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + v_3(t) & v_1(t) - iv_2(t) \\ v_1(t) + iv_2(t) & 1 - v_3(t) \end{pmatrix}$$

A segundo orden se encuentra la siguiente ecuación para $\mathbf{v}(t)$,

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 + a_{yx} & a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & a_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_z \end{pmatrix}$$

donde

$$a_{yx}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \nu(t_1) \sin(\omega_0 t_1), \quad (5.51)$$

$$a_{yy}(t) = a_{zz}(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \nu(t_1) \cos(\omega_0 t_1), \quad (5.52)$$

$$b_z(t) = \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \eta(t_1) \sin(\omega_0 t_1). \quad (5.53)$$

En la aproximación a cuarto orden la estructura de la ecuación para $\mathbf{v}(t)$ se mantiene, pero los coeficientes a_{yx} , a_{yy} , a_{zz} y b_z cambian. Por ejemplo a la expresión de $a_{yx}(t)$ se le debe sumar,

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \quad \{ \sin(\omega_0(t_2 - t_1)) \cos(\omega_0 t_3) \eta(t_2) \eta(t_3 - t_1) \\
& \quad + \sin(\omega_0(t_3 - t_1)) \cos(\omega_0 t_2) \eta(t_3) \eta(t_2 - t_1) \\
& \quad + \sin(\omega_0(t_3 - t_2)) \cos(\omega_0 t_1) \\
& \quad \times [\nu(t_3) \nu(t_2 - t_1) - \eta(t_3) \eta(t_2 - t_1)] \}
\end{aligned}$$

y a los otros tres coeficientes se les deben sumar integrales similares.

En la figura 5.14 se muestran las gráficas de a_{yx} , a_{zz} y b_z a segundo orden, para un caso altamente no markoviano.

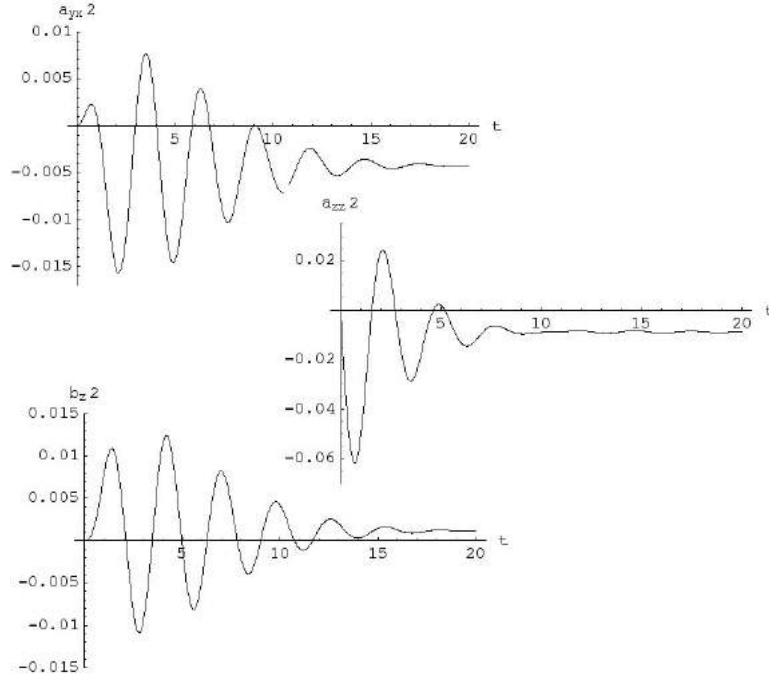


Figura 5.14: $a_{yx}(t)$, $a_{zz}(t)$ y $b_z(t)$ para $\gamma = 1$, $\lambda = 0,3$, $\omega = \lambda/2$ y $\Delta = 8\lambda$

Nótese que aunque se halla escogido $\gamma = 1$ al realizar las gráficas de la figura 5.14, el coeficiente de amortiguamiento en el límite Markoviano ($-a_{zz}(\infty)$) es altamente reducido, siendo cercano a 0,01.

A continuación presentamos las gráficas de la segunda y tercera componente del vector de Bloch (figuras 5.15 y 5.16) en función del tiempo para los mismos parámetros que se escogieron en la figura 5.14. Se muestran superpuestos

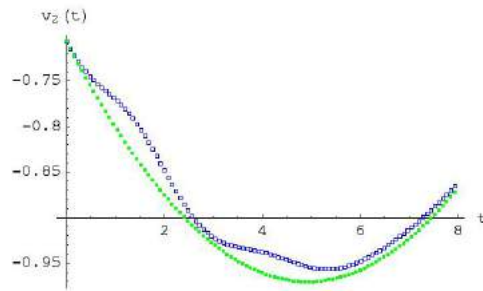


Figura 5.15: $v_2(t)$. Los cuadros azules (sin relleno) muestran la simulación con TCL y los verdes la aproximación de Markov.

los resultados Markovianos y los resultados obtenidos con la técnica TCL. En $v_3(t)$ (es decir las poblaciones) se aprecian oscilaciones para tiempos cortos, en contraste con el comportamiento monótono de la solución Markoviana. Estas oscilaciones se deben a que el coeficiente de amortiguamiento oscila fuertemente para tiempos cortos llegando a ser negativo, debido a que el desfase, Δ , es grande. Este comportamiento oscilante del amortiguamiento puede conllevar a fenómenos de *re-coherencia*, como por ejemplo intervalos en que las poblaciones y coherencias aumentan, en lugar de decaer, como se espera comúnmente.

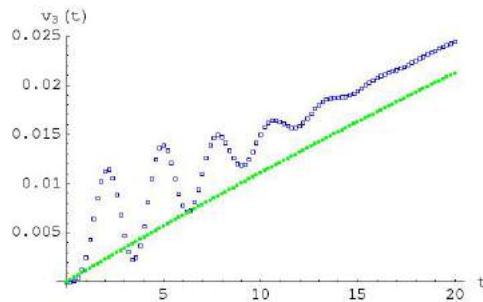


Figura 5.16: $v_3(t)$. Los cuadros azules (sin relleno) muestran la simulación con TCL y los verdes la aproximación de Markov.

En la primera componente del vector de Bloch no se presentan apreciables diferencias entre la aproximación Markoviana y los resultados con TCL, esto debido principalmente a que la derivada de $v_1(t)$ no depende directamente de los parámetros del baño, sino solamente por intermedio de $v_2(t)$.

Ya que la decoherencia es el principal inconveniente para hacer aplicaciones “cuánticas”, el estudio de cómo un sistema pasa de “dinámica coherente” a “dinámica incoherente” es uno de los más activos hoy en día. La forma en que se “mide” la decoherencia no es única, de hecho depende de cada situación. Por

ejemplo la entropía se puede considerar como una medición de la decoherencia. También es usada la $tr\{\rho^2\}$, en donde si ρ es un estado coherente o cuánticamente puro $tr\{\rho^2\}$ vale 1, y entre más incoherente o estadísticamente mezclado sea ρ el valor de $tr\{\rho^2\}$ se acercará a $1/N$, siendo N la dimensión del sistema.

En el presente trabajo usaremos una medida de la decoherencia especial para tiempos cortos [26].

Denotemos por $\varrho(t)$ la diferencia entre la matriz densidad del sistema sujeto a disipación ($\rho(t)$) y la matriz densidad del sistema en el caso en que no halla disipación ($\rho^i(t)$), es decir,

$$\varrho(t) = \rho(t) - \rho^i(t). \quad (5.54)$$

La decoherencia $D(t)$, la calcularemos así,

$$D(t) = \sup_{\phi \neq 0} \left(\frac{\langle \phi | \varrho^2(t) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.55)$$

Para un sistema de dos niveles se tiene que,

$$D(t) = \sqrt{|\varrho_{11}|^2 + |\varrho_{01}|^2}. \quad (5.56)$$

En la figura 5.17 mostramos la decoherencia para los mismos parámetros de las gráficas anteriores.

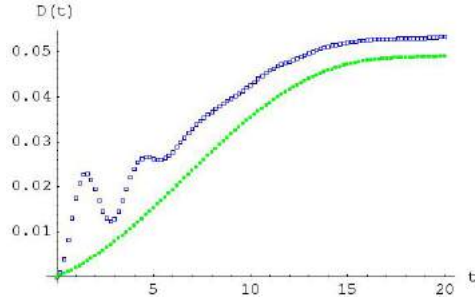


Figura 5.17: $D(t)$.

Sorprendentemente se encuentra en este caso que la aproximación Markoviana subestima la decoherencia. Este comportamiento se debe a la alta “No-Markovianidad” de la situación supuesta, por ejemplo si se tomase $\Delta = 0$ los coeficientes $a_{ij}(t)$ no oscilarían y en ese caso la aproximación de Markov sobrestimaría la decoherencia.

Analizaremos ahora el caso en que $B_z \neq 0$ y $B_x = 0$. El Hamiltoniano de interacción en la imagen de interacción rezará entonces,

$$H_I(t) = \frac{1}{2} \sigma_z(t) \otimes B(t) = \frac{1}{2} \sigma_z \otimes B(t). \quad (5.57)$$

El hecho notable que $\sigma_z(t) \equiv \sigma_z$, simplifica enormemente los cálculos, principalmente hace que

$$K_4'(t)\rho_Q = 0. \quad (5.58)$$

El cálculo de $K_2'(t)$ nos conduce a la siguiente ecuación para el vector de Bloch,

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{pmatrix} a_{xx} & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}(t)$$

donde

$$a_{xx}(t) = a_{yy}(t) = -4 \int_0^t dt_1 \nu(t_1). \quad (5.59)$$

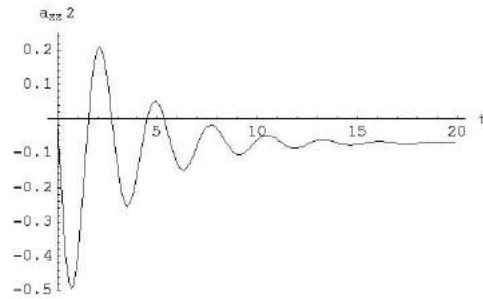


Figura 5.18: $a_{xx}(t)$ para $\gamma = 1$, $\lambda = 0,3$, $\omega = \lambda/2$ y $\Delta = 8\lambda$

En la figura 5.18 se muestra la gráfica de $a_{xx}(t)$ para los mismos coeficientes de la figura 5.14.

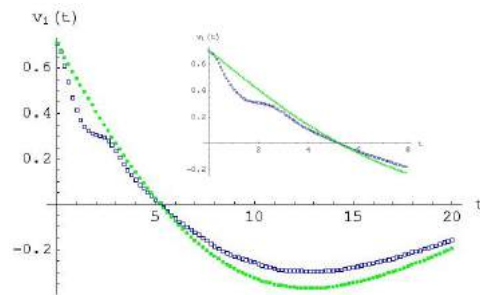


Figura 5.19: $v_1(t)$. Los cuadros azules (sin relleno) muestran la simulación con TCL y los verdes la aproximación de Markov.

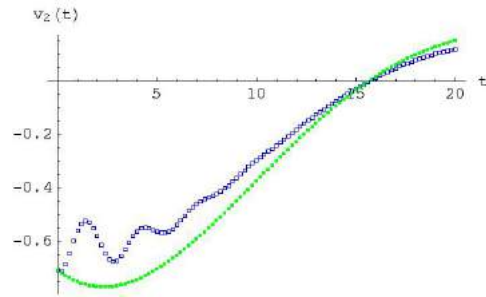


Figura 5.20: $v_2(t)$. Los cuadros azules (sin relleno) muestran la simulación con TCL y los verdes la aproximación de Markov.

En este caso $v_3(t)$ es constante, por consiguiente la energía del qubit es constante. En las dos figuras anteriores mostramos las gráficas de $v_1(t)$ y $v_2(t)$.

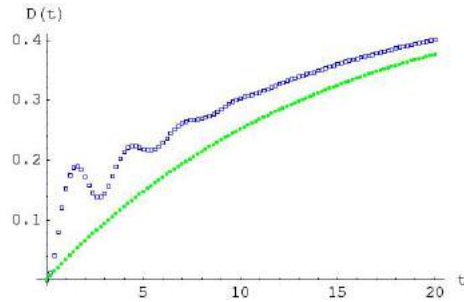


Figura 5.21: $D(t)$.

En la figura 5.21 mostramos la gráfica para la decoherencia. Es interesante notar que para este Hamiltoniano la decoherencia es un orden de magnitud mayor que para el Hamiltoniano que se analizó anteriormente. Esto se puede prever de las ecuaciones de movimiento. En el primer caso $\dot{v}_1(t)$ no incluye ningún término disipativo mientras que en el segundo caso tanto $\dot{v}_1(t)$ como $\dot{v}_2(t)$ incluyen términos disipativos.

Sería interesante realizar análisis posteriores en los que se haga una transición continua entre los dos casos estudiados en esta sección, i.e $B_z = 0$ y $B_x = 0$.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se expuso brevemente la teoría BCS sobre la superconductividad y se presentó de forma general la teoría de sistemas cuánticos abiertos con el fin de analizar bajo la técnica time convolutionless, TCL, la dinámica No-Markoviana para juntas Josephson en dos situaciones particulares, en la primera, la junta Josephson se modela como un oscilador anarmónico (modelo de SQUID) y en la segunda se modela como un sistema de dos niveles (qubit). A continuación presentamos las conclusiones para cada uno de estos casos.

Oscilador Anarmónico

En la sección 5.1 se estudió la dinámica No-Markoviana de una junta Josephson de geometría circular en presencia de un campo magnético constante y bajo el efecto de un baño térmico, en el caso en que el valor esperado del flujo magnético a través la junta es mucho menor que el quantum de flujo magnético, $\langle \phi \rangle \ll \frac{hc}{2e}$, condición equivalente a que el valor esperado de la diferencia de fase a través de la junta sea mucho menor que 2π . Como consecuencia de la restricción anterior, después de expandir el Hamiltoniano de la junta a cuarto orden en $\hat{\phi}$ y de realizar la aproximación de onda rotante, es lícito modelar la junta circular como un oscilador anarmónico. El baño térmico lo modelamos como un conjunto infinito de osciladores armónicos que se acoplan linealmente a la junta. Las funciones de correlación del baño las calculamos por medio de una densidad espectral Óhmica con corte Lorentz-Drude.

Para hallar la ecuación de movimiento de la matriz densidad de la junta se usó la técnica TCL a segundo y cuarto orden. Se demostró que de la técnica TCL a segundo orden se puede hallar una ecuación Master en la forma de Lindblad si se cumplen dos condiciones, primero que la anarmonicidad no sea grande y segundo, que el tiempo de correlación del baño térmico sea mucho menor que el tiempo “propio” del sistema, es decir $\nu \ll \Omega$ y $\lambda^{-1} \ll \Omega^{-1}$ respectivamente. Aquí es importante hacer énfasis en lo siguiente, (1) que si no se cumple $\nu \ll \Omega$ *no es posible* escribir la ecuación Master en la forma de Lindblad; (2) que la aproximación Markoviana es adecuada para tiempos mucho mayores a λ^{-1} ; y

(3) que las diferencias a tiempos “cortos” entre los resultados predichos por la aproximación markoviana y las técnicas TCL a segundo y cuarto orden serán menores en la medida en que $\Omega/\lambda \rightarrow 0$.

Comúnmente se cree que la aproximación de Born-Markov es “buena” si, entre otras cosas, el acople del sistema con el medio es “pequeño” ($\gamma \ll 1$). Sin embargo la ecuación 5.28 nos permite mostrar que el acople *efectivo* del sistema con el medio puede depender de parámetros del sistema. En nuestro caso la rata de disipación es

$$\gamma_{efec} = \frac{2\gamma\Omega}{1 + (\Omega/\lambda)^2},$$

así que la aproximación de Markov será “buena” si $\gamma_{efec} \ll 1$ y no es suficiente que $\gamma \ll 1$. En particular para un oscilador (an)armónico de “alta” frecuencia la aproximación Markoviana puede no dar muy buenos resultados, ya que por lo general se tiene que $\Omega/\lambda < 1$.

La evolución temporal de ρ_S se hizo numéricamente¹. Para constatar que la juntura presenta superposiciones mesoscópicas de estados coherentes, hecho muy importante para el desarrollo de la computación cuántica, se usó la función $Q(\alpha)$. Se mostraron las diferencias en algunas variables físicas al comparar las predicciones hechas por la aproximación markoviana y la técnica TCL. Para el caso en que el acople de la juntura con el medio es pequeño, $\gamma = 0,001$, se observó que la aproximación markoviana sobreestima la rata con que la juntura disipa energía, de hecho con la técnica TCL se muestra que inicialmente (en $t = 0$) la juntura no disipa energía. En el caso en que el acople es grande, $\gamma = 1$, se evidenció que la aproximación markoviana no produce resultados útiles, al menos en lo que se refiere a la energía. Se observa que la aproximación markoviana tampoco reproduce correctamente la derivada temporal en $t = 0$ de las poblaciones de los estados de carga de la juntura. Analizando la figura 5.12 notamos que los efectos No-Markovianos pueden durar tiempos múltiples “pequeños” del tiempo de correlación del baño térmico², lo que ofrece nuevas posibilidades para diseñar experimentos en los que se quiera encontrar efectos de memoria.

Qubit Superconductor

En la sección 5.2 se estudió la dinámica No-Markoviana de una juntura Josephson, en donde se escogió un superconductor para el que la brecha superconductora Δ , es mucho mayor que la energía de carga E_C y que la energía de tunelamiento de pares E_J . En tal caso la juntura se comporta como un qubit que puede ser de dos tipos, de carga o de flujo. El estudio hecho en la sección 5.2 comprende estas dos clases de qubits. La juntura se acopla a un número infinito de osciladores armónicos por intermedio de una cavidad. El acople se

¹Los parámetros (Ω , ν , λ , etc...) en cada simulación se mantienen constantes, si no se especifica lo contrario.

²En el caso de la figura 5.12, el triple.

hace por medio de la componente z del spin³ y el cálculo de las funciones de correlación del baño térmico lo hacemos usando una densidad espectral estilo Jaynes-Cummings.

Para los dos tipos de qubits, de carga y de flujo, estudiamos dos casos interesantes, en el primero se toma $B_z = 0$ y por consiguiente el Hamiltoniano de la juntura produce una rotación en el espacio de spin con respecto al eje x . En el segundo caso el Hamiltoniano produce una rotación con respecto al eje z , ya que se toma $B_x = 0$.

En el caso en que $B_z = 0$ usamos la técnica TCL a cuarto orden para hallar una ecuación de movimiento para el vector de Bloch. A tiempos cortos encontramos que la segunda y tercera componentes del vector de Bloch presentan comportamientos altamente No-Markovianos, como lo son oscilaciones y fenómenos de recoherencia. Es interesante notar que la primera componente del vector de Bloch no presenta “sensibilidad” hacia los efectos de memoria, es así que las diferencias entre los resultados predichos por la aproximación Markoviana y los resultados predichos por la técnica TCL son imperceptibles para ésta componente.

Para calcular la decoherencia usamos la función $D(t)$, inspirada en métodos que se usan generalmente para medir la norma de operadores. La función $D(t)$ mide la diferencia entre la matriz densidad para el qubit cuando éste evoluciona en presencia de disipación y la matriz densidad cuando el qubit evoluciona en ausencia de disipación. Encontramos que la decoherencia que predice la aproximación de Markov, además de no presentar las oscilaciones que encontramos con la técnica TCL, es menor que la decoherencia predicha por TCL. Normalmente se espera que la decoherencia predicha por Markov sea mayor que la decoherencia real; sin embargo en sistemas en los que los efectos de memoria son prominentes se pueden encontrar situaciones extrañas como la mencionada.

Para el caso $B_x = 0$ se hizo un estudio semejante al del caso $B_z = 0$. Se encontraron resultados similares, sin embargo hubo tres diferencias importantes. La primera, es notar que el cuarto orden de la técnica TCL “es cero”, es decir $K_4(t) = 0$. La segunda, es que la decoherencia es alrededor de un orden de magnitud mayor en el caso $B_x = 0$ que en el caso $B_z = 0$. La última y más importante diferencia es que la tercera componente del vector de Bloch es constante, lo que indica que el qubit *¡no disipa energía!*⁴ Más aún, este hecho es independiente de la densidad espectral y es consecuencia únicamente de la forma del acople supuesto. Claro está, es necesario anotar que si el qubit es de carga, B_x no es exactamente cero sino mucho menor a B_z , por consiguiente la energía no será constante, sin embargo variará lentamente. Por otro lado, si el qubit es de flujo, B_x es cero sólo cuando el flujo magnético externo es un múltiplo impar de hc/e , lo que se podrá lograr con cierta precisión, pero no exactamente. Más importante que el hecho de que B_x no sea exactamente cero, es que puede haber formas de disipación que no se incluyeron en el modelo usado, por ejemplo interacción de la juntura con ondas electromagnéticas. Sin embargo el hecho de

³Componente z con respecto a los estados de carga, sin embargo con respecto a los estados propios del Hamiltoniano se acoplan las componentes z y x .

⁴El valor esperado de la energía es constante.

que la energía varíe lentamente no deja de ser bastante conspicuo.

6.1. Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a Luis Quiroga Puello, director de este proyecto de grado, las siempre oportunas y certeras correcciones, comentarios y discusiones; ayudas indispensables sin las que hubiese sido imposible finalizar este trabajo. También agradezco su especial talento para acercarme a la bibliografía correcta.

A mis padres, con particular sentimiento, agradezco no solo el apoyo que me han brindado en la realización de este documento, sino especialmente la formación sin igual, tanto personal como de físico, que he recibido de ellos en todos estos años. Igualmente agradezco a mi hermano su desprendida colaboración durante la formación de este documento.

Considerando este trabajo como la culminación de mis estudios de pregrado en física, me es imposible no aprovechar esta oportunidad para agradecer al Departamento de Física de la Universidad de los Andes estos cuatro años de incomparable apoyo. De la misma forma recuerdo emocionado los cursos que tuve la fortuna de tomar con Luis Quiroga y con Carlos Avila.

Por último, no puedo terminar sin recordar el tiempo que estuve participando en “Las Olimpiadas Colombianas de Física”, y con gran afecto agradecer a aquellos queridos profesores, Fernando Vega, Luis Alejandro Ladino, Leonardo Castañeda y a Eduardo Zalamea mi padre.

Bibliografía

- [1] H. Mabuchi. *Engineering & Physics*, 2:22, 2002.
- [2] Y. Makhlin *et al.* *Rev. Mod. Phys.*, 108:1175–, 1957.
- [3] H. K. Onnes. *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden*, 119:120, 1911.
- [4] Meissner *et al.* *Naturwiss.*, 21:787, 1933.
- [5] E. Maxwell. *Phys. Rev.*, 78:487, 1950.
- [6] Fröhlin. *Phys. Rev.*, 79:845, 1950.
- [7] Bardeen. *Phys. Rev.*, 79:167, 1950.
- [8] Bardeen. *Phys. Rev.*, 80:567, 1950.
- [9] Bardeen. *Phys. Rev.*, 81:829, 1951.
- [10] Bardeen *et al.* *Phys. Rev.*, 108:1175, 1957.
- [11] A. L. DiRienzo *et al.* *Am. J. Phys.*, 51:587, 1983.
- [12] P. W. Anderson. In *Lectures on the Many-Body Problem*, edited by E. R. Caianello. Academic, New York, 1964.
- [13] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures On Physics*. Adison-Wesley, New York, 1965.
- [14] D.Vion *et al.* *Science*, 296:886, 2002.
- [15] Yang Yu *et al.* *Science*, 296:889, 2002.
- [16] T. Yamamoto *et al.* *Nature*, 425:941, 2003.
- [17] A. Barenco *et al.* *Phys. Rev. A.*, 52:3457, 1995.
- [18] Nakajima. *Prog. Theor. Phys.*, 20:948, 1958.
- [19] R. Zwanzig. *J. Chem. Phys.*, 33:1338, 1960.
- [20] I. Prigogine. *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. Interscience Publishers, New York, 1962.

- [21] H. P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002.
- [22] H. P. Breuer *et al.* *quant-ph/0401051*, 2004.
- [23] J. Zou *et al.* *Phys. Rev. B.*, 64:024511, 2001.
- [24] J. Zou *et al.* *Phys. Lett. A.*, 256:375, 1999.
- [25] E. Jaynes *et al.* *Proc. IEEE*, 51:89, 1963.
- [26] Federov *et al.* *cond-mat/0401248*, 2004.